Problema 9, versão A

Vamos considerar um sinal $x(t)$ par e um sinal $h(t)$ ímpar. Dadas estas condições de simetria, temos

$$x(-t) = x(t)$$
$$h(-t) = -h(t)$$

Designando por $y(t)$ a convolução dos dois sinais, temos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau ,$$

e portanto

$$y(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(-t-\tau)\, d\tau$$

Pelas condições de simetria, podemos escrever

$$y(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)\left[-h(t+\tau)\right] d\tau$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)\, h(t+\tau)\, d\tau$$

Este integral é semelhante ao da convolução, mas tem a variável de integração com o sinal trocado. Para obtermos um integral na forma normal, vamos fazer a mudança de variável $\tau' = -\tau$. Temos $d\tau = -d\tau'$, e portanto

$$y(-t) = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau')\, h(t-\tau')\, (-d\tau')$$
$$= \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau')\, h(t-\tau')\, d\tau'$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau')\, h(t-\tau')\, d\tau'$$
$$= -y(t)$$

Como $y(-t) = -y(t)$, conclui-se que a convolução de x e h é um sinal ímpar.