Problema 8, versão A

8.1) Fazendo $x(t) = e^{j\omega t}$, sabemos (do estudo das funções próprias dos SLITs) que $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$. Substituindo x e y na equação, e calculando as derivadas nela indicadas, obtemos

$$H(j\omega)\,j\omega e^{j\omega t} + 3H(j\omega)e^{j\omega t} = -\omega^2 e^{j\omega t} - j\omega e^{j\omega t} - 2e^{j\omega t}.$$

Dividindo ambos os membros por $e^{j\omega t}$ (que é diferente de zero) e pondo $H(j\omega)$ em evidência do lado esquerdo,

$$H(j\omega)(j\omega + 3) = -\omega^2 - j\omega - 2,$$

e portanto

$$H(j\omega) = -\frac{\omega^2 + j\omega + 2}{j\omega + 3}.$$

8.2) Exprimimos o seno em termos de exponenciais,

$$x(t) = \sin(20t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j20t} - e^{-j20t}\right).$$

Pela propriedade da resposta às exponenciais mencionada na alínea anterior,

$$y(t) = \frac{1}{2j}\left[H(j20)e^{j20t} - H(-j20)e^{-j20t}\right].$$

Do resultado da alínea anterior,

$$\begin{aligned}
H(j20) &= -\frac{402 + 20j}{3 + 20j} \\
&= -\frac{(402 + 20j)(3 - 20j)}{(3 + 20j)(3 - 20j)} \\
&= \underbrace{-\frac{1606}{409}}_{a} + \underbrace{\frac{7980}{409}}_{b}j \\
&= a + bj.
\end{aligned}$$

Como o sistema é real (dado que a equação diferencial só tem coeficientes reais), $H(-j20) = H^*(j20) = a - jb$. Temos então

$$y(t) = \frac{1}{2j}\left[(a+jb)e^{j20t} - (a-jb)e^{-j20t}\right].$$

Como as duas parcelas dentro do parêntesis recto são conjugadas entre si,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2j}\, 2j\, \mathrm{Im}\left[(a+jb)e^{j20t}\right] \\ &= a \sin(20t) + b\cos(20t) \\ &= -\frac{1606}{409}\sin(20t) + \frac{7980}{409}\cos(20t) \\ &\simeq -3.438\sin(20t) + 19.511\cos(20t). \end{aligned}$$

8.3) Sendo $x(t) = 3e^{2t}u(-t)$, $X(j\omega) = -\frac{3}{j\omega - 2}$ (do formulário).

Portanto a transformada da resposta do sistema é

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega)\,X(j\omega) \\ &= +\frac{\omega^2 + j\omega + 2}{j\omega + 3}\;\frac{3}{j\omega - 2} \\ &= 3\,\frac{\omega^2 + j\omega + 2}{(j\omega+3)(j\omega-2)}. \end{aligned}$$

Esta expressão pode-se simplificar. Calculando as raízes do numerador (fazendo $s = j\omega$) obtém-se

$$\begin{aligned} \omega^2 + j\omega + 2 &= -s^2 + s + 2 \\ &= -(s+1)(s-2) \\ &= -(j\omega+1)(j\omega-2) \end{aligned}$$

e portanto

$$Y(j\omega) = -3\,\frac{j\omega+1}{j\omega+3}.$$