

Sinais e Sistemas – 1º semestre de 2006/2007

Soluções do 5º teste

Problemas 1 a 8

Apresentam-se as chaves para as várias versões do enunciado. Estas versões identificam-se pelas letras “A” a “D”, de acordo com a ordem pela qual foram publicadas.

Problema:	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão A	VVVVVVFVV	a	a	d	a	a	d	b
Versão B	VVVVFVVFV	b	c	c	d	b	c	a
Versão C	VVVVVVFFV	c	d	a	c	c	b	d
Versão D	VVVVFVVFV	a	a	b	b	d	a	c

Problema 9

Apresenta-se a resolução para a versão A do enunciado.

- A expressão da função de transferência do sistema tira-se directamente da equação diferencial que o rege, e é

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{s+2}{s^2+s-6} \\ &= \frac{s+2}{(s-2)(s+3)}.\end{aligned}$$

- A região de convergência (RC) de $H(s)$ tem de incluir o eixo imaginário, porque o sistema é estável e tem função de transferência racional. Também por $H(s)$ ser racional, as fronteiras da sua RC têm de conter pólos da função. Dado que os pólos se situam em -3 e 2 , a RC corresponde a

$$-3 < \operatorname{Re}(s) < 2.$$

- A transformada de Laplace do sinal de entrada pode obter-se, por exemplo, através do formulário, e é

$$X(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{para} \quad \operatorname{Re}(s) > -2$$

- A expressão da transformada de Laplace do sinal de saída é então, pela propriedade da convolução (da transformada de Laplace),

$$\begin{aligned}Y(s) &= X(s)H(s) \\ &= \frac{1}{(s-2)(s+3)} \\ &= \frac{1/5}{s-2} - \frac{1/5}{s+3},\end{aligned}$$

em que o último passo corresponde já à decomposição em fracções simples.

- A RC de $Y(s)$ contém a intersecção das RCs de X e de H , que corresponde a $-2 < \text{Re}(s) < 2$. Por outro lado, as fronteiras da RC de $Y(s)$ têm de conter pólos desta função, devido a $Y(s)$ ser uma função racional. Assim, a RC de $Y(s)$ corresponde a

$$-3 < \text{Re}(s) < 2.$$

- A transformada inversa de $Y(s)$ obtém-se directamente da decomposição desta função em fracções simples, através do formulário, sendo apenas necessário determinar qual a RC correspondente a cada uma das fracções simples. Dado que a fronteira da RC correspondente a cada fracção simples tem de conter o pólo dessa fracção, e que ambas as RCs têm de conter a RC de $Y(s)$, conclui-se que as RCs das duas fracções simples correspondem, respectivamente, a $\text{Re}(s) < 2$ e $\text{Re}(s) > -3$.
- Através do formulário conclui-se então que o sinal de saída é dado por

$$y(t) = -\frac{1}{5}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{5}e^{-3t}u(t).$$

Notas:

- Dado que a RC de H não é uma faixa vertical, a resposta do sistema ao impulso unitário é bilateral, e portanto o sistema não é causal. Não surpreende por isso que, apesar de o sinal de entrada “começar” apenas em $t = 0$, a resposta do sistema “comece” antes (vem desde $-\infty$).
- O sistema é estável, segundo os dados do problema. Sendo o sinal de entrada limitado, o sinal de saída também tem de ser limitado, e de facto é-o.
- É fácil de verificar que o sinal $y(t)$ obtido satisfaz a equação diferencial, com a entrada $x(t)$ dada, quer para $t < 0$, quer para $t > 0$.
- Quanto ao ponto $t = 0$, o primeiro membro da equação tem um impulso $\delta(t)$, proveniente de y'' (dado que y' apresenta uma descontinuidade, de “altura” igual a 1, em $t = 0$). O segundo membro tem um impulso idêntico, proveniente de x' (dado que x apresenta também uma descontinuidade, da mesma “altura”, em $t = 0$). Não existem mais nenhuns impulsos, ou derivadas de impulsos, provenientes de qualquer dos membros. Portanto a equação é, de facto, satisfeita, para todo o t , pelo $y(t)$ que foi calculado.

Problema 10

Apresenta-se a resolução para a versão A do enunciado. No final apresentam-se breves considerações sobre a resolução para as outras versões do enunciado.

- Pela relação de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(t)y_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(j\omega)Y_2^*(j\omega)d\omega,$$

e portanto y_1 e y_2 serão ortogonais sse o integral do segundo membro se anular.

- Pela propriedade da convolução (da transformada de Fourier), $Y_i(j\omega) = X(j\omega)H_i(j\omega)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(j\omega)Y_2^*(j\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)H_1(j\omega)X^*(j\omega)H_2^*(j\omega)d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)|X(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)d\omega \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t)h_2^*(t)dt, \end{aligned}$$

em que, no penúltimo passo, se usou o facto de que $|X(j\omega)|=1$, e no último passo se usou novamente a relação de Parseval, agora em sentido contrário.

- O integral que figura na última linha da derivação anterior é nulo, dado que h_1 e h_2 são ortogonais entre si. Portanto o integral do primeiro membro também é nulo, e em consequência y_1 e y_2 são ortogonais entre si. Q. E. D.

Notas sobre as outras versões do enunciado:

- Todas as versões envolviam a transformação da condição de ortogonalidade para o domínio da frequência, através da relação de Parseval. Na versão B, em que poderia ser menos natural considerar-se a passagem para esse domínio, isso era explicitamente sugerido no enunciado.
- Na versão B, a demonstração fazia uso do facto de $|X(j\omega)|$ ser par e do facto de $H(j\omega)$ ser ímpar. Era sugerido dividir o integral de $-\infty$ a $+\infty$ em dois (que se anulavam entre si).
- Na versão C, a demonstração fazia uso do facto de tanto $|X(j\omega)|$ como $|H_1(j\omega)|$ serem pares. Era sugerido dividir o integral de $-\infty$ a $+\infty$ em dois (que se anulavam entre si devido à relação, que era dada, entre H_1 e H_2).
- Na versão D, a demonstração fazia uso do facto de o produto $H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)$ ser nulo para todo o ω , dado as bandas passantes dos dois filtros serem disjuntas.