Sinais e Sistemas – 2005/06, 2º semestre
Soluções do 5º mini-teste

Chaves dos problemas 1 a 4 para as quatro versões do enunciado, pela mesma ordem por que estas versões foram publicadas:

Versão	**A**	**B**	**C**	**D**
P1	VVVVV	VFVVV	VFVFV	VVVFV
P2	c	a	b	c
P3	a	c	a	c
P4.1	b	a	c	b
P4.2	c	a	d	c

Resolução do Problema 2 para a versão A do enunciado

- Funções de transferência dos blocos (excepto H_2, que era dado no enunciado). Indicam-se apenas as expressões. Não é necessário ir contabilizando as regiões de convergência porque sabemos que, sendo todos os blocos causais, o sistema global também tem de ser causal.

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$$

$$H_3(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$H_4(z) = \frac{1}{12} z^{-1}$$

- Função de transferência do paralelo de H_2 com H_3:

$$\begin{aligned} H_p(z) &= H_3(z) - H_2(z) \\ &= \frac{2\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)} \end{aligned}$$

- Função de transferência do anel de realimentação:

$$
\begin{aligned}
H_a(z) &= \frac{H_p(z)}{1-H_p(z)H_4(z)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\dfrac{1}{12}z^{-1}} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{12}z^{-1}} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}
\end{aligned}
$$

- Função de transferência do sistema completo:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \\
&= \frac{-3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}
\end{aligned}
$$

- Resposta no tempo (tomando em conta que o sistema é causal):

$$
h[n] = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]
$$

Resolução do Problema 3 para a versão A do enunciado

De acordo com o que se pede no enunciado, é necessário que $\dfrac{|H(j10)|^2}{|H(j30)|^2} \geq 41$, sendo $H(j\omega) = \dfrac{10^2}{-\omega^2 + j20\xi\omega + 10^2}$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{|H(j10)|^2}{|H(j30)|^2} &= \frac{\left|-30^2 + j20\xi 30 + 10^2\right|^2}{\left|-10^2 + j20\xi 10 + 10^2\right|^2} \\
&= \frac{\left|-3^2 + j2\xi 3 + 1\right|^2}{\left|-1 + j2\xi 1 + 1\right|^2} \\
&= \frac{\left|-8 + j6\xi\right|^2}{\left|j2\xi\right|^2} \\
&= \frac{64 + 36\xi^2}{4\xi^2} \\
&= \frac{16 + 9\xi^2}{\xi^2}
\end{aligned}
$$

A condição dada no enunciado fica

$$\frac{16+9\xi^2}{\xi^2} \geq 41$$
$$16+9\xi^2 \geq 41\xi^2$$
$$16 \geq 32\xi^2$$
$$0{,}5 \geq \xi^2$$
$$|\xi| \leq \sqrt{0{,}5}$$

Como é dito no enunciado que o sistema é causal e estável, os seus pólos têm que estar no semi-plano esquerdo, o que corresponde a $\xi > 0$. Assim, a condição final é $0 < \xi \leq \sqrt{0{,}5}$.

Comentários ao Problema 4

Tal como foi frisado algumas vezes (e nomeadamente numa das aulas "práticas" dadas no horário das teóricas, no final do semestre), numa situação deste tipo a resposta do sistema global é simplesmente o escalamento em frequência da resposta do sistema discreto (considerada de $-\pi$ a π), fazendo a frequência discreta 2π corresponder, no sistema global, à frequência de amostragem.

Resolução do Problema 5 para a versão A do enunciado

Resolução mais "tradicional"

O sinal, sendo periódico, é uma soma de exponenciais complexas, dada pela série de Fourier. Os coeficientes da série são:

$$a_0 = \frac{1}{4}(8+4) = 3$$
$$a_1 = \frac{1}{4}(8-4j) = 2-j$$
$$a_2 = \frac{1}{4}(8-4) = 1$$
$$a_3 = \frac{1}{4}(8+4j) = 2+j$$

As exponenciais complexas correspondentes têm, respectivamente, as frequências 0, $\pi/2$, π e $3\pi/2$.

O filtro, sendo real, tem resposta em frequência hermiteana, pelo que a banda passante, no intervalo de $-\pi$ a π, vai de $-5\pi/8$ a $5\pi/8$. A banda $(-5\pi/8, 5\pi/8)$ repete-se na banda $(11\pi/8, 21\pi/8)$ porque a resposta dum sistema discreto é periódica com período 2π .

Comparando com as frequências das exponenciais complexas, verifica-se que a única que é cortada pelo filtro é a de frequência π.

Assim, o sinal de saída é constituído pela soma das outras exponenciais, com a mesma amplitude que tinham no sinal de entrada. Representando os sinais já na forma de sequências (e indicando estas com parêntesis rectos, para distinguir melhor dos outros parêntesis),

$$\begin{aligned} y[n] &= 3\times[1,1,1,1] + (2-j)\times[1,\ j,\ -1,\ -j] + (2+j)\times[1,\ j,\ -1,\ -j] \\ &= [3,3,3,3] + [2-j,\ 1-2j,\ -2+j,\ -1+2j] + [2+j,\ 1+2j,\ -2-j,\ -1-2j] \\ &= [7,\ 5,\ -1,\ 1] \end{aligned}$$

Nota: Sabe-se, logo à partida, que a resposta do sistema é real. Por esse motivo, na segunda linha das expressões acima, não teria sido necessário considerar as partes imaginárias dos vários valores, o que permitiria simplificar um pouco os cálculos.

Resolução mais simples

Pelo mesmo raciocínio que foi feito acima, sabe-se que a única exponencial complexa que é cortada pelo filtro é a de frequência π, correspondente ao coeficiente a_2. Assim, para calcular a saída do sistema bastaria calcular a_2, como se fez acima, e depois subtrair a exponencial de frequência π, multiplicada por a_2, do sinal de entrada:

$$\begin{aligned} y[n] &= [8,\ 4,\ 0,\ 0] - 1 \times [1,\ -1,\ 1,\ -1] \\ &= [7,\ 5,\ -1,\ 1] \end{aligned}$$

Comentários sobre o Problema 6

Ambas as alíneas correspondem a problemas "clássicos": cálculo duma convolução no tempo e cálculo dessa convolução através da transformada de Laplace, sendo racionais todas as transformadas envolvidas. Dois aspectos nos quais alguns alunos mostraram ter mais dificuldades:

- A convolução de $x(t)$ com $\delta(t)$ é igual ao próprio $x(t)$.
- A transformada de Laplace de $\delta(t)$ é igual a 1.

Resolução do Problema 7 para a versão A do enunciado

Pelas propriedades de simetria da transformada de Fourier, e pelo facto de $h(t)$ ser real, a transformada de Fourier de $h(-t)$ é $\mathcal{F}\left[h(-t)\right] = H(-j\omega) = H^*(j\omega)$.

De acordo com o enunciado, se $X(j\omega) = H^*(j\omega)$ então $Y(j\omega) = H^*(j\omega)$. Mas, por outro lado, $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$. Assim, a condição fica

$$H^*(j\omega) = H^*(j\omega)H(j\omega) .$$

Esta condição verifica-se sse, para cada valor de ω, se tiver

$$H(j\omega) = 1 \ \vee\ H(j\omega) = 0 .$$

Nota: Pode-se ter $H(j\omega) = 1$ para algumas gamas de valores de ω e $H(j\omega) = 0$ para as restantes gamas. Há, por isso, uma infinidade de sistemas que satisfazem a condição indicada.