Sinais e Sistemas – 2005/06, 2º semestre

Soluções do 3º mini-teste

Chaves dos problemas 1 a 4 para as quatro versões do enunciado, pela mesma ordem por que estas versões foram publicadas:

- Versão A: 1-c, 2-b, 3-a, 4-d.
- Versão B: 1-a, 2-a, 3-b, 4-b.
- Versão C: 1-d, 2-b, 3-c, 4-c.
- Versão D: 1-c, 2-c, 3-d, 4-a.

Chave do problema 5 para as quatro versões do enunciado, pela mesma ordem por que estas versões foram publicadas:

- Versão A: a) Linear - V, Invariante - V, Causal - V, Estável - V, Real - F, Inversível - F; b) V.
- Versão B: a) Linear - V, Invariante - V, Causal - F, Estável - V, Real - V, Inversível - F; b) V.
- Versão A: a) Linear - V, Invariante - V, Causal - V, Estável - V, Real - F, Inversível - F; b) V.
- Versão A: a) Linear - V, Invariante - V, Causal - F, Estável - V, Real - V, Inversível - F; b) V.

Comentário ao Problema 1

Era dada a saída para uma entrada que era um impulso rectangular de comprimento 2. Essa saída era um impulso triangular de comprimento 2.

Em todas as versões do enunciado a entrada representada na figura podia ser decomposta na soma de dois impulsos rectangulares desse tipo, com deslocamentos e factores multiplicativos apropriados. Bastava depois usar a linearidade e a invariância no tempo para obter a saída como a sobreposição de dois impulsos triangulares de comprimento 2, com os mesmos deslocamentos e factores multiplicativos.

Resolução do Problema 3 para a versão A do enunciado

A equação de cálculo dos coeficientes pode-se escrever, para este caso,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{7}\sum_{n=-3}^{3} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{7}n} \\ &= \frac{1}{7}\left(-e^{jk\frac{2\pi}{7}3} - e^{jk\frac{2\pi}{7}2} - e^{jk\frac{2\pi}{7}1} + e^{-jk\frac{2\pi}{7}1} + e^{-jk\frac{2\pi}{7}2} + e^{-jk\frac{2\pi}{7}3} \right) \end{aligned}$$

Agrupando as exponenciais duas a duas e multiplicando e dividindo por $2j$ obtém-se

$$a_k = \frac{2j}{7}\left(\sin\left(3k\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(2k\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(k\frac{2\pi}{7}\right) \right)$$

Resolução do Problema 4 para a versão A do enunciado

Cálculo da transformada de Fourier

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^1 e^{-t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-(1+j\omega)t}}{-1-j\omega} \right]_0^1 \\ &= \frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega} \end{aligned}$$

Comentários ao Problema 5

O primeiro passo, neste problema, consistia em reconhecer que a definição dada correspondia a um sistema linear invariante no tempo, cuja resposta em frequência era dada por $(1+a e^{j\omega t_0})H(j\omega)$ (em que os valores de a e b diferiam entre as várias versões do enunciado). Daqui concluía-se imediatamente que o sistema era **linear** e **invariante** no tempo.

Em todos os casos existiam valores da frequência para os quais esta resposta em frequência se anulava. Colocando à entrada do sistema uma exponencial complexa com esta frequência e com qualquer amplitude, a saída seria nula. Portanto havia vários sinais que davam a mesma saída, pelo que o sistema era **não inversível**.

Em seguida, tendo em conta as propriedades da transformada de Fourier, concluía-se que a resposta ao impulso do novo sistema era dada por $h(t) - a\,h(t+t_0)$. Nos casos em que a era real o sistema era **real**, e nos outros casos era **não real**. Da forma da resposta ao impulso, sabendo que o sistema original era estável, era fácil concluir que o novo sistema era necessariamente **estável**. Nos casos em que $t_0 < 0$ o sistema era necessariamente **causal**. Nos casos em que $t_0 > 0$ o sistema podia ser **não causal**, mas podia também ser **causal**, bastando para isso que $h(t)$ "começasse" suficientemente tarde.

Resolução do Problema 6 para a versão A do enunciado

Aplicando as propriedades da transformada de Fourier (especificamente a da diferenciação e a do deslocamento)

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= j\omega X(j\omega) - e^{-j\omega} X(j\omega) \\ &= j\omega e^{j\omega} - 1 \end{aligned}$$