Sinais e Sistemas – 2005/06, 2º semestre

Soluções do 2º mini-teste

Chaves das perguntas de resposta múltipla para as quatro versões do enunciado, pela mesma ordem por que estas versões foram publicadas:

- Versão A: 1-d, 2-e, 3-a, 4-a.
- Versão B: 1-a, 2-b, 3-c, 4-b.
- Versão C: 1-c, 2-d, 3-c, 4-e.
- Versão D: 1-b, 2-e, 3-d, 4-d.

Comentário ao Problema 1

Tanto a série como o paralelo de dois sistemas não lineares pode ser linear (basta as não-linearidades compensarem-se). Do mesmo modo, tanto a série como o paralelo de dois sistemas variantes no tempo podem ser invariantes no tempo.

Por exemplo, os sistemas definidos por

$$y(t) = x(t) + t \qquad \text{e} \qquad y(t) = x(t) - t$$

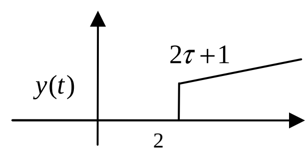
são ambos não lineares e variantes no tempo, mas tanto a sua série como o seu paralelo são lineares e invariantes no tempo.

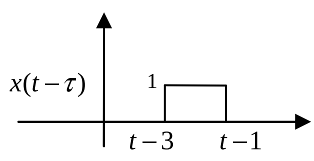
Resolução do Problema 2 para a versão A do enunciado

A convolução é dada por

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)\,d\tau\,. \tag{1}$$

Tracem-se graficamente os dois sinais que figuram no integral, para facilitar o cálculo deste.





Notar que se utilizou a comutatividade da convolução, na equação (1), para escolher os sinais que são mais fáceis de tratar.

De figura tira-se facilmente:

- Para $t-1<2$, ou seja, para $t<3$, o integral é nulo.

- Para $t-3<2<t-1$, ou seja, para $3<t<5$, o integral é dado por

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_2^{t-1} (2\tau+1)\,d\tau \\ &= \left[\tau^2+\tau\right]_2^{t-1} \\ &= t^2-t-6 \end{aligned}$$

- Para $t-3>2$, ou seja, para $t>5$, o integral é dado por

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{t-3}^{t-1} (2\tau+1)\,d\tau \\ &= \left[\tau^2+\tau\right]_{t-3}^{t-1} \\ &= 4t-6 \end{aligned}$$

Esta solução não coincide com nenhuma das alternativas dadas, pelo que a resposta correcta era a e). Claro que para concluir isso bastava fazer o cálculo para $3<t<5$ ou para $t>5$. Não era necessário fazer os dois.

Resolução do Problema 3 para a versão A do enunciado

O período do sinal dado é 6, pelo que a frequência fundamental é $\omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Os coeficientes da série são dados por

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{6}\left(-\int_{-2}^{-1} e^{-jk\omega_0 t}dt + \int_1^2 e^{-jk\omega_0 t}dt\right) \\ &= -\frac{1}{6}\left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{6}\left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{6}\frac{e^{j2\omega_0}-e^{j\omega_0}}{jk\omega_0} + \frac{1}{6}\frac{e^{-j\omega_0}-e^{-j2\omega_0}}{jk\omega_0} \\ &= \frac{1}{jk\pi}\left[\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

Resolução do Problema 4 para a versão A do enunciado

Do enunciado,

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_{-1} = 1,\ a_2 = \frac{1}{2j},\ a_{-2} = -\frac{1}{2j},\ a_k = 0 \text{ para outros } k$$

Usa-se a equação de síntese da série de Fourier:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_o t} \\ &= 1 + e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t} + \frac{1}{2j}e^{j2\omega_o t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\omega_o t} \\ &= 1 + 2\cos(\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t) \end{aligned}$$

Resolução do Problema 5 para a versão A do enunciado

1. Condição necessária:

- Admitimos que $x[n] \geq 0 \ \forall n \ \Rightarrow \ y[n] \geq 0 \ \forall n$, e vamos provar que $h[n] \geq 0 \ \forall n$.
- Fazemos $x[n] = \delta[n]$ do que resulta, por definição, $y[n] = h[n]$.
- Este $x[n]$ satisfaz $x[n] \geq 0 \ \forall n$, e portanto, das hipóteses, podemos concluir que $y[n] \geq 0 \ \forall n$.
- Mas $y[n] = h[n]$, e portanto $h[n] \geq 0 \ \forall n$.

2. Condição suficiente:

- Admitimos que $h[n] \geq 0 \ \forall n$ e que $x[n] \geq 0 \ \forall n$, e vamos provar que $y[n] \geq 0 \ \forall n$.
- $y[n]$ é dado pela convolução

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] .$$

- Dadas as hipóteses, na soma acima todas as parcelas são todas ≥ 0. Portanto a soma também é ≥ 0, isto é,

$$y[n] \geq 0 \ \ \forall n .$$

Resolução do Problema 5 para a versão B do enunciado

1. Condição necessária:

- Admitimos que *se o sinal de entrada for par então o sinal de saída também é par*, e vamos provar que $h[n]$ *é par.*
- Fazemos $x[n] = \delta[n]$ do que resulta, por definição, $y[n] = h[n]$.
- Este $x[n]$ é par, e portanto, das hipóteses, podemos concluir que $y[n]$ é par.
- Mas $y[n] = h[n]$, e portanto $h[n]$ é par.

2. Condição suficiente:

- Admitimos que $h[n]$ é par e que $x[n]$ também é par, e vamos provar que $y[n]$ é par.
- Calculando $y[-n]$ pela convolução,

$$y[-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-n-k] .$$

- Usando a paridade de *x* e de *h* podemos escrever

$$y[-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[n+k]$$

- Fazendo a mudança de índice $k' = -k$,

$$y[-n] = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k']h[n-k']$$
$$y[n]$$

Resolução do Problema 5 para a versão C do enunciado

1. Condição necessária:

   - Admitimos que *se a resposta do sistema ao sinal* $x[n]$ *é* $y[n]$*, então a resposta a* $(-1)^n x[n]$ *é* $(-1)^n y[n]$, e vamos provar que $h[n] = 0$ *se n for ímpar.*

   - Fazemos $x[n] = \delta[n]$ donde resulta, por definição, $y[n] = h[n]$.

   - Para este $x[n]$ tem-se $(-1)^n x[n] = x[n]$ e portanto, dada a hipótese, $(-1)^n y[n] = y[n]$. Mas isto significa que $y[n] = 0$ se n for ímpar.

   - Como vimos, $y[n] = h[n]$, e portanto $h[n] = 0$ se n for ímpar.

2. Condição suficiente:

   - Admitimos que $h[n] = 0$ *se n for ímpar*, e vamos provar que *se a resposta do sistema ao sinal* $x[n]$ *é* $y[n]$*, então a resposta a* $(-1)^n x[n]$ *é* $(-1)^n y[n]$.

   - Represente-se por $z[n]$ a resposta a $(-1)^n x[n]$, e calcule-se $z[n]$ por convolução

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k](-1)^{n-k} x[n-k]$$
$$= (-1)^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k](-1)^{-k} x[n-k]$$

   - Mas, para k ímpar, $h[k] = 0$ e, para k par, $(-1)^{-k} = 1$. Portanto, em qualquer caso, $h[k](-1)^{-k} = h[k]$. Daí,

$$z[n] = (-1)^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$
$$= (-1)^n y[n]$$

   que é o que se queria provar.

Resolução do Problema 5 para a versão D do enunciado

A resolução é quase idêntica à apresentada para a versão B do enunciado.