

# Resposta no tempo de sistemas de primeira e de segunda ordem só com pólos

Luís Borges de Almeida

Maio de 2011

## 1. Introdução

Estas notas apresentam, de forma sumária, o estudo da resposta no tempo dos sistemas de primeira e de segunda ordem só com pólos. De um modo geral apresentam-se apenas os resultados, sem as respectivas derivações (que, na grande maioria dos casos, são muito simples).

Enquanto, dum ponto de vista teórico, a resposta ao impulso é a ferramenta mais importante para caracterizar os sistemas no domínio do tempo, nas aplicações práticas é bastante mais importante caracterizar a resposta ao escalão. Na Fig. 1 representa-se uma resposta ao escalão genérica, e identificam-se os principais parâmetros que se utilizam para a caracterizar.

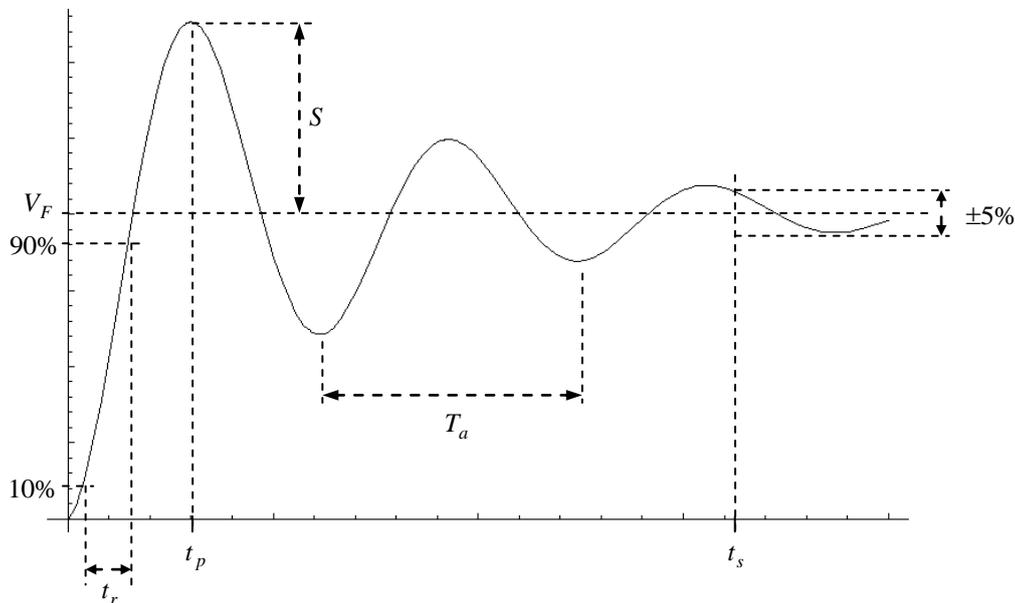


Figura 1 – Parâmetros da resposta dum sistema ao escalão.

Estes parâmetros são:

- **Valor final** ( $V_F$ ) – Valor para o qual tende, assintoticamente, a resposta. Este valor é, na generalidade das situações de interesse prático, igual ao ganho estático do sistema,  $H(0)$ .
- **Tempo de subida** ( $t_r$ ) – Tempo que a resposta leva entre a primeira vez que cruza um determinado limite inferior e a primeira vez que cruza um determinado limite superior. Estes limites são geralmente definidos em percentagem do valor final. É vulgar usarem-se os tempos de subida 10%–90%, 5%–95% e 0–100%.
- **Sobre-elevação** ( $S$ ) – Diferença entre o valor máximo e o valor final da resposta, geralmente medida como percentagem ou fracção do valor final.
- **Tempo de pico** ( $t_p$ ) – Tempo que a resposta leva a atingir o seu valor máximo.
- **Frequência** ( $\omega_a$  ou  $f_a$ ) e **período** ( $T_a$ ) **das oscilações amortecidas** – Frequências (angular ou linear) e período das oscilações amortecidas que a resposta apresenta em torno do valor final. Estes parâmetros só se definem no caso de essas oscilações existirem e serem periódicas aparte o amortecimento da amplitude.

- **Tempo de estabelecimento** ( $t_s$ ) – Tempo ao fim do qual a resposta se encontra definitivamente dentro de determinada margem em torno do valor final. É habitual definir-se a largura dessa margem em percentagem do valor final, e é frequente a utilização duma margem de  $\pm 5\%$ . Este tempo indica-se frequentemente na forma  $t_s(\pm 5\%)$ , mas por vezes usa-se simplesmente a forma  $t_s(5\%)$ .

## 2. Sistemas de primeira ordem

A função de transferência destes sistemas, no caso de ganho estático unitário, é dada por

$$H(s) = \frac{-a}{s-a},$$

com  $a < 0$ , para que o sistema seja estável. É habitual usar-se, em vez de  $a$ , o parâmetro  $\tau = -1/a$ , ao qual se dá o nome de *tempo de relaxação* ou *constante de tempo* do sistema. Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1/\tau}{s+1/\tau} \\ &= \frac{1}{\tau s+1}, \end{aligned} \quad (1)$$

correspondendo à equação diferencial

$$\tau y'(t) + y(t) = x(t).$$

### 2.1. Resposta ao impulso

A partir da função de transferência (1), tendo em conta que se está a considerar um sistema causal, é fácil de concluir que a resposta ao impulso unitário é dada por

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t),$$

que se encontra representada graficamente na Fig. 2. Nesta figura indicam-se alguns dos elementos mais importantes desta curva.

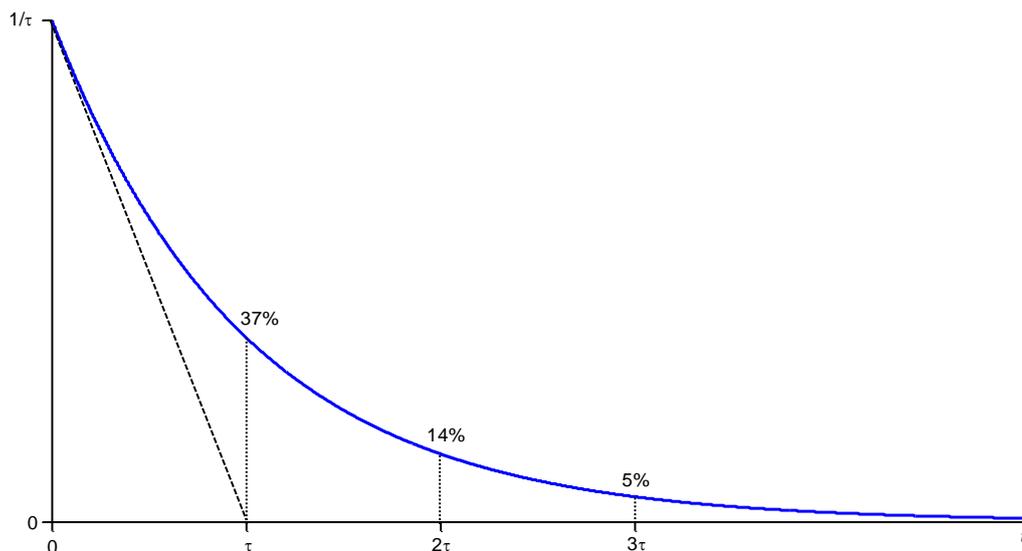


Figura 2 – Resposta dum sistema de primeira ordem ao impulso.

## 2.2. Resposta ao escalão

Em qualquer SLIT, a resposta ao escalão unitário é dada por

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(t') dt',$$

tendo-se  $s'(t) = h(t)$ . No sistema que estamos a estudar, esta resposta é

$$s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t),$$

função que se encontra representada na Fig. 3.

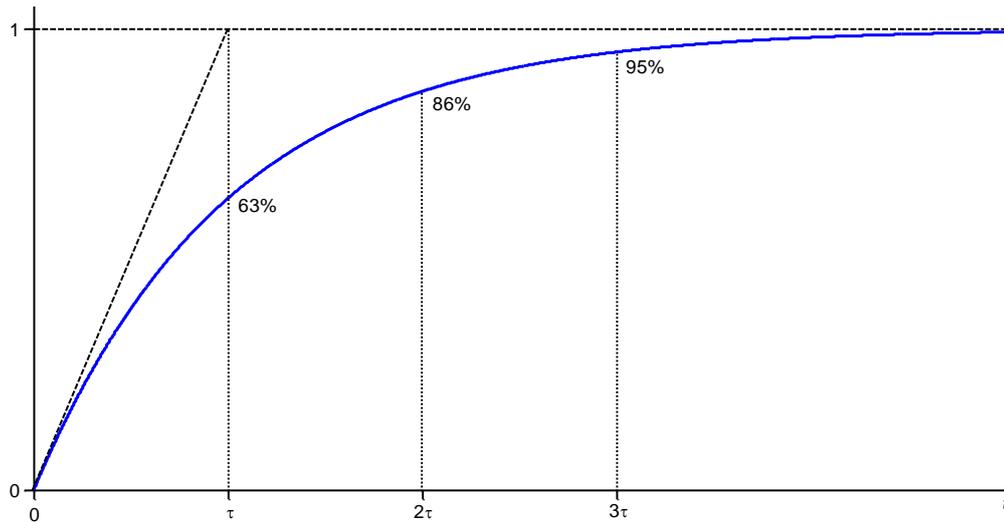


Figura 3 – Resposta dum sistema de primeira ordem ao escalão.

Os parâmetros mais importantes desta resposta são

- Tempos de subida

$$t_r(10\% - 90\%) \approx 2.2\tau$$

$$t_r(5\% - 95\%) \approx 2.95\tau$$

- Tempo de estabelecimento

$$t_s(\pm 5\%) \approx 3\tau.$$

O tempo de subida (0–100%) é, naturalmente, infinito.

Como facilmente se pode verificar, quanto maior for  $\tau$ , mais tempo leva a resposta do sistema a estabilizar, e mais perto está o pólo do eixo imaginário. Este é um resultado geral, válido para qualquer tipo de sistemas:

*Quanto mais perto estiverem os pólos dum sistema do eixo imaginário, mais tempo o sistema leva a estabilizar.*

## 3. Sistemas de segunda ordem

Vamos estudar o sistema que apresenta ganho estático igual a 1. Parametrizamos a sua função de transferência da seguinte forma:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2)$$

com  $\omega_n > 0$ . Esta função tem pólos no semiplano esquerdo, correspondendo a um sistema causal e estável, sse  $\xi > 0$ . Para  $0 < \xi < 1$  os pólos são complexos conjugados, sendo reais se  $\xi > 1$ . A Fig. 4 ilustra a situação em que os pólos são complexos conjugados.

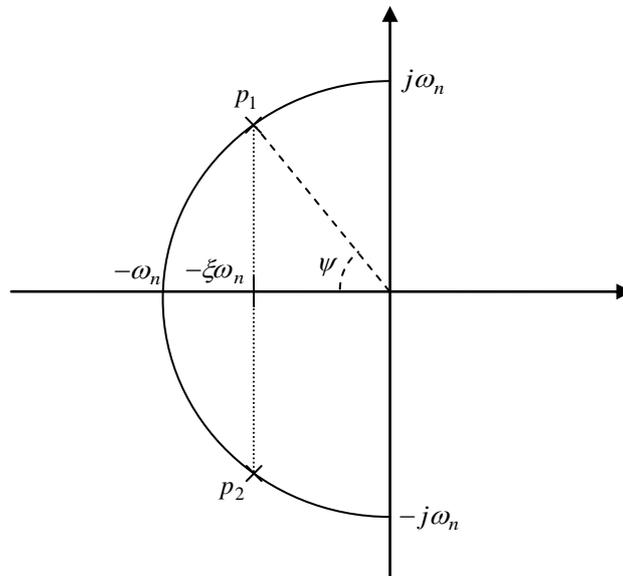


Figura 4 – Localização, no plano  $s$ , dos pólos dum sistema de segunda ordem com pólos complexos conjugados.

Por razões que se tornarão mais claras com a continuação deste estudo, a  $\omega_n$  dá-se o nome de *frequência natural* ou *frequência própria* do sistema, e a  $\xi$  dá-se o nome de *factor de amortecimento*. Os sistemas de segunda ordem tomam as seguintes designações em função do valor de  $\xi$ :

- Sistema sub-amortecido, se  $0 < \xi < 1$ .
- Sistema criticamente amortecido, se  $\xi = 1$ .
- Sistema sobre-amortecido, se  $\xi > 1$ .

Estudaremos separadamente os sistemas sub- e sobre-amortecidos, e trataremos os sistemas criticamente amortecidos com caso limite, de fronteira entre estas duas classes.

### 3.1. Sistemas sub-amortecidos

A Fig. 4 ilustra a relação das posições dos pólos com os parâmetros  $\omega_n$  e  $\xi$ . Indica também o ângulo  $\psi = \arccos \xi$ , que será útil na caracterização destes sistemas. Os pólos são dados por

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}.$$

Definimos  $\tau = 1/(\xi\omega_n)$ , parâmetro que, como veremos, irá desempenhar um papel semelhante ao da constante de tempo dos sistemas de primeira ordem. Definimos ainda  $\omega_a = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ , valor que representa, como veremos, a frequência das oscilações amortecidas do sistema. Assim, os pólos são dados por

$$p_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_a.$$

#### 3.1.1 Resposta ao impulso

A função de transferência (2) pode decompor-se na soma de duas fracções simples, correspondentes aos dois pólos, e é fácil de concluir que a resposta ao impulso tem de ser da forma

$$h(t) = (A_1 e^{-t/\tau} e^{j\omega_a t} + A_2 e^{-t/\tau} e^{-j\omega_a t}) u(t). \quad (3)$$

Os dois termos do lado direito têm de ser conjugados entre si porque  $h(t)$  é real, pelo que  $A_2 = A_1^*$ . É fácil de ver que  $h(t)$  vai apresentar uma oscilação com frequência  $\omega_a$ , oscilação cuja amplitude decai com uma envolvente da forma  $2|A_1|e^{-t/\tau}$ . Assim,  $\tau$  desempenha o papel de *constante de tempo* do decaimento das oscilações do sistema. Mais precisamente, a resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-t/\tau} \sin(\omega_a t) u(t).$$

Esta resposta encontra-se ilustrada na Fig. 5 para  $\omega_n = 1$ , para vários valores do factor de amortecimento, incluindo o caso criticamente amortecido.

Os termos  $1/\tau$  e  $\omega_a$ , que surgem na expressão de  $h(t)$ , são proporcionais a  $\omega_n$ , pelo que  $h(t)$  depende de  $t$  apenas através do produto  $\omega_n t$ . Por isso,  $\omega_n$  desempenha o papel de factor de escala no eixo dos tempos. Por outro lado, a amplitude de  $h(t)$  é proporcional a  $\omega_n$ , pelo que este desempenha também o papel de factor de escala na amplitude. Tomando isto em conta, é fácil adaptar os gráficos da Fig. 5 a qualquer outro valor de  $\omega_n$ . Por exemplo,  $\omega_n = 2$  corresponderia a uma contracção dos gráficos por um factor de 2 no eixo dos tempos e a uma expansão pelo mesmo factor na amplitude.

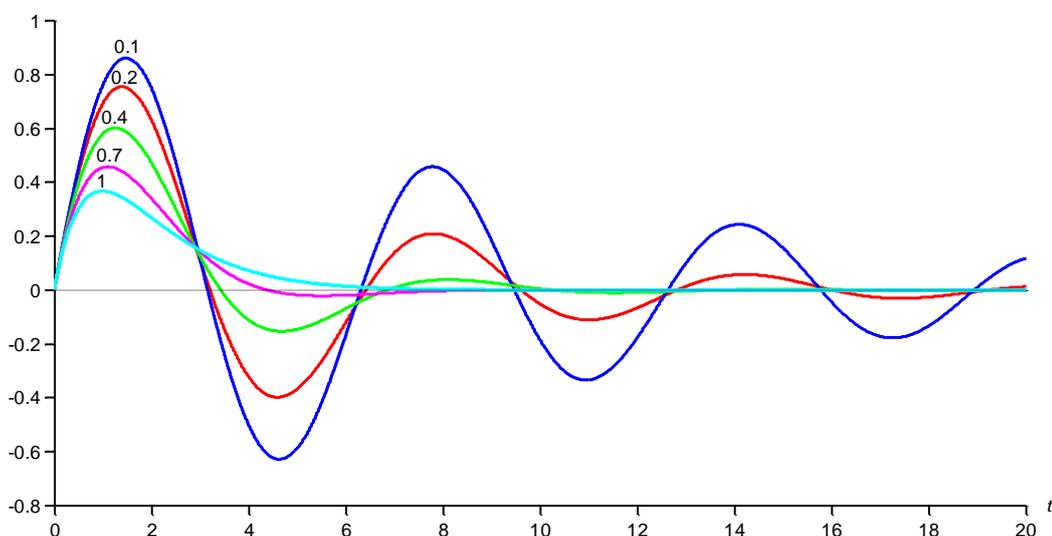


Figura 5 – Resposta dum sistema de segunda ordem sub-amortecido ou criticamente amortecido ao impulso. Os valores do factor de amortecimento estão indicados junto das curvas correspondentes.

### 3.1.2. Resposta ao escalão

Integrando a resposta ao impulso (3) obtém-se

$$s(t) = \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-t/\tau} \sin(\omega_a t + \psi) \right] u(t). \quad (4)$$

A Fig. 6 ilustra as respostas ao escalão para  $\omega_n = 1$ , para vários valores do factor de amortecimento, incluindo o caso criticamente amortecido. A função  $s(t)$  só depende de  $t$  através do produto  $\omega_n t$ , e  $\omega_n$  não tem influência na amplitude de  $s(t)$ . Por isso,  $\omega_n$  apenas afecta a escala dos tempos: quanto maior for  $\omega_n$ , mais rápida será a resposta do sistema, o que, novamente, torna muito fácil adaptar os gráficos a outros valores de  $\omega_n$ .

As respostas ao escalão, com excepção do caso criticamente amortecido, apresentam oscilações com frequência  $\omega_a$  e com amplitude amortecida com constante de tempo  $\tau = 1/(\xi\omega_n)$ . A frequência de oscilação diminui com o aumento de  $\xi$ , mas essa diminuição é difícil de notar nos gráficos, porque, para  $\xi$  pequeno,  $\omega_a$  é quase igual a  $\omega_n$ , e, para  $\xi$  grande, o amortecimento das oscilações é muito rápido.

As respostas convergem para o valor final 1, igual à amplitude do escalão de entrada. Isto resulta de termos escolhido uma função de transferência com ganho estático unitário,  $H(0) = 1$ .

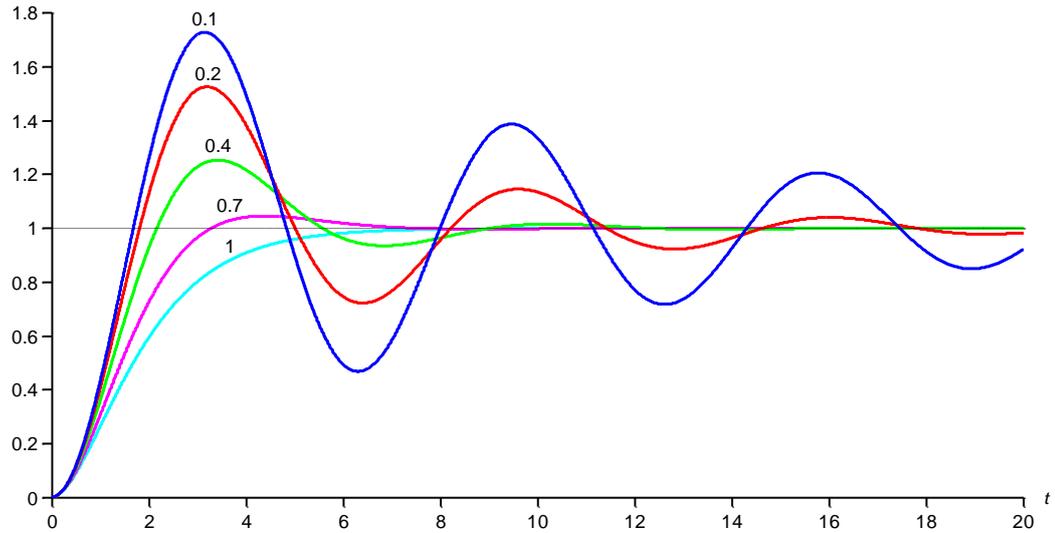


Figura 6 – Resposta dum sistema de segunda ordem sub-amortecido ou criticamente amortecido ao escalão. Os valores do factor de amortecimento estão indicados junto das curvas correspondentes.

Os principais parâmetros destas respostas são:

- Período das oscilações amortecidas

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

- Tempo de pico

$$t_p = \frac{T_a}{2} = \frac{\pi}{\omega_a}$$

- Sobre-elevação

$$S = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\pi\cot(\psi)}$$

- Tempo de subida

$$t_r(0-100\%) = \frac{\pi - \psi}{\omega_a} \quad (5)$$

- Tempo de estabelecimento

$$t_s(\pm 5\%) \lesssim 3\tau \quad (6)$$

Para outros tempos de subida, como por exemplo os 10%–90% e 5% – 95% não existem expressões simples. A Fig. 7 mostra a variação destes tempos, bem como do tempo (0–100%), em função do factor de amortecimento.

O valor do tempo de estabelecimento dado por (6) é obtido de (4) tomando-se em conta apenas a envolvente  $e^{-t/\tau}$ , sem se tomar em conta a sinusóide, que oscila entre  $-1$  e  $1$ , nem o factor  $1/\sqrt{1-\xi^2}$ , que é superior a  $1$ . A aproximação  $\sqrt{1-\xi^2} \approx 1$  só é válida para valores pequenos de  $\xi$ , e portanto piora à medida que o factor de amortecimento se aproxima de  $1$ . A Fig. 8 mostra a variação do tempo de estabelecimento em função de  $\xi$ , bem como a aproximação dada pela expressão (6).

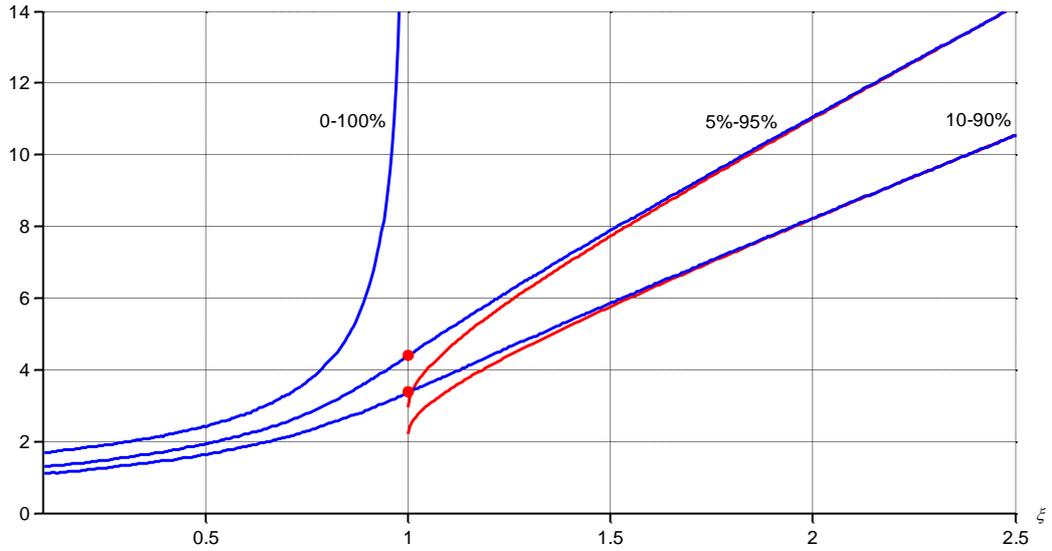


Figura 7 – Tempos de subida de sistemas de segunda ordem, em função do factor de amortecimento. A vermelho mostram-se as aproximações dadas pelas expressões (7) para sistemas sobre-amortecidos. Os círculos vermelhos indicam as aproximações para sistemas criticamente amortecidos dadas pelas expressões (9).

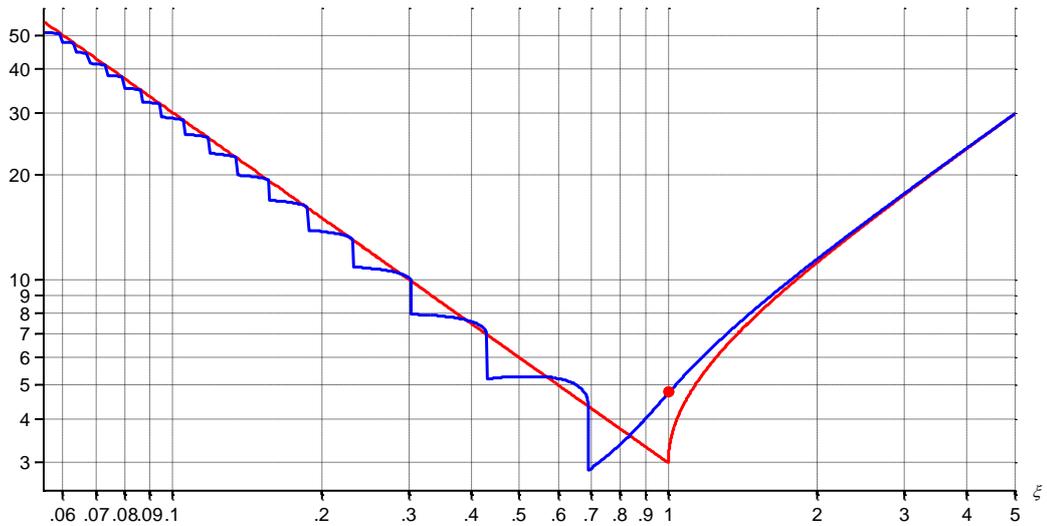


Figura 8 – Tempos de estabelecimento de sistemas de segunda ordem, em função do factor de amortecimento. A vermelho mostram-se as aproximações dadas pelas expressões (6) e (8). O círculo vermelho indica a aproximação para sistemas criticamente amortecidos dada pela expressão (10).

### 3.2. Sistemas sobre-amortecidos

Quando  $\xi > 1$ , a função de transferência (2) apresenta dois pólos reais dados por  $p_{1,2} = \omega_n(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$ . Quando  $\xi \rightarrow +\infty$ ,  $p_1$  tende para a origem e  $p_2$  tende para  $-\infty$ . Para  $\xi \gg 1$  tem-se

$$p_1 \approx -\frac{\omega_n}{2\xi}$$

$$p_2 \approx -2\xi\omega_n$$

### 3.2.1 Resposta ao impulso

A resposta ao impulso para  $t > 0$  vai, naturalmente, ser a soma de duas exponenciais com expoentes  $p_1 t$  e  $p_2 t$ , respectivamente, com amplitudes apropriadas. Definindo

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}},$$

aquela resposta é dada por

$$h(t) = M(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})u(t).$$

A Fig. 9 mostra o comportamento desta resposta para  $\omega_n = 1$ , para vários valores do factor de amortecimento, incluindo o caso criticamente amortecido. Relativamente à influência de  $\omega_n$ , são ainda válidas as conclusões tiradas no caso sub-amortecido:  $\omega_n$  desempenha apenas o papel de factor de escala, tanto nos tempos como nas amplitudes.

Note-se que esta resposta não apresenta oscilação, tendo apenas uma subida inicial seguida duma descida assintótica para zero. Pode-se verificar que o comportamento da resposta, para  $t$  grande, é *dominado* pela exponencial correspondente ao pólo mais próximo do eixo imaginário, que é  $p_1$ . Isto deve-se ao facto de esta exponencial decair mais lentamente do que a correspondente a  $p_2$ . Para valores elevados de  $\xi$  os pólos estão bastante afastados entre si, e a resposta é quase idêntica à dum sistema de primeira ordem apenas com o pólo  $p_1$ .

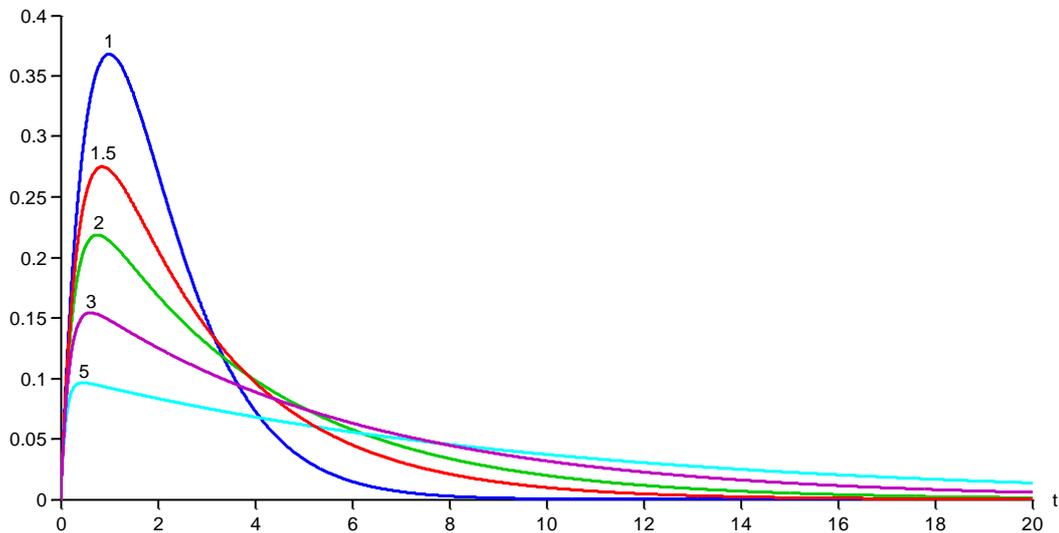


Figura 9 – Resposta dum sistema de segunda ordem sobre-amortecido ou criticamente amortecido ao impulso. Os valores do factor de amortecimento estão indicados junto das curvas correspondentes.

### 3.2.2 Resposta ao escalão

Esta resposta obtém-se novamente por integração de  $h(t)$ , e é dada por

$$s(t) = \left( 1 + \frac{M}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{M}{p_2} e^{p_2 t} \right) u(t).$$

A Fig. 10 mostra o comportamento desta resposta para  $\omega_n = 1$ , para vários valores do factor de amortecimento, incluindo o caso criticamente amortecido. Note-se que a resposta é sempre crescente, tendendo assintoticamente para o valor final e não apresentando oscilação. Note-se também que, tal como no caso sub-amortecido,  $\omega_n$  actua apenas como um factor de escala no eixo dos tempos.

Nesta resposta evidencia-se, ainda mais do que na resposta ao impulso, a *dominância* do termo correspondente a  $p_1$ , e portanto a resposta é quase idêntica à dum sistema de primeira ordem apenas com o pólo  $p_1$ . Este efeito é mais marcado na resposta ao escalão do que na resposta ao impulso porque na resposta ao escalão a amplitude do termo correspondente a  $p_2$  vem dividida pelo próprio valor de  $p_2$ , cujo módulo é maior que o de  $p_1$ .

A sobre-elevação da resposta ao escalão é, naturalmente, nula. As aproximações para os tempos de crescimento e de estabelecimento podem obter-se facilmente desde que, com  $\xi \gg 1$ , se façam as aproximações de que o termo correspondente a  $p_2$  é desprezável e de que  $M/p_1 \approx -1$ . Nesse caso o sistema comporta-se como um sistema de primeira ordem com um pólo em  $p_1$ , e portanto, fazendo  $\tau = -1/p_1$ , obtêm-se as mesmas expressões que nos sistemas de primeira ordem:

- Tempos de subida

$$\begin{aligned} t_r(10\% - 90\%) &\approx 2.2\tau \\ t_r(5\% - 95\%) &\approx 2.95\tau \end{aligned} \quad (7)$$

- Tempo de estabelecimento

$$t_s(5\%) \approx 3\tau. \quad (8)$$

As Figs. 7 e 8 mostram a evolução destes tempos em função de  $\xi$  e ilustram a validade das aproximações indicadas em (7) e (8). Pode-se verificar que, para  $\xi = 1.5$ , os erros de aproximação são já inferiores a 10% em todos os casos.

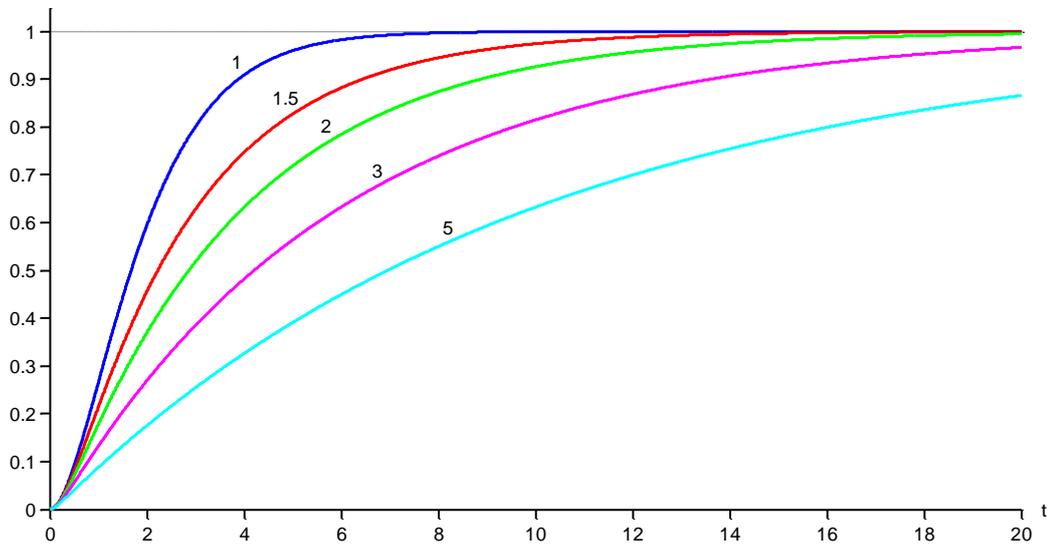


Figura 10 – Resposta dum sistema de segunda ordem sobre-amortecido ou criticamente amortecido ao escalão. Os valores do factor de amortecimento estão indicados junto das curvas correspondentes.

### 3.3. Sistemas criticamente amortecidos

#### 3.3.1. Resposta ao impulso

Para  $\xi = 1$  a função de transferência (2) apresenta um pólo duplo em  $-\omega_n$ . A expressão da resposta ao impulso é

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t).$$

A representação gráfica foi já feita nas Figs. 5 e 9. Esta resposta não apresenta oscilação, tendo apenas um período inicial de subida seguido duma descida assintótica para zero. Mais uma vez,  $\omega_n$  actua simplesmente como factor de escala nos eixos dos tempos e das amplitudes.

#### 3.3.2. Resposta ao escalão

Esta resposta é dada por

$$s(t) = [1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}] u(t).$$

O seu gráfico está representado nas Figs. 6 e 10. Trata-se duma função crescente que tende assintoticamente para o valor final de 1. Mais uma vez,  $\omega_n$  actua simplesmente como factor de escala no eixo dos tempos.

Tal como no caso sobre-amortecido, a sobre-elevação desta resposta é nula. Os tempos de subida e de estabelecimento são:

- Tempos de subida

$$\begin{aligned}t_r(10\% - 90\%) &\approx \frac{3.4}{\omega_n} \\t_r(5\% - 95\%) &\approx \frac{4.4}{\omega_n}\end{aligned}\quad (9)$$

- Tempo de estabelecimento

$$t_s(5\%) \approx \frac{4.8}{\omega_n}. \quad (10)$$

## 4. Comentários finais

### 4.1. Velocidade de estabilização a longo prazo

Vale a pena enfatizar o facto, já referido a propósito dos sistemas de primeira ordem, de que quanto mais perto estiverem os pólos do eixo imaginário, mais tempo o sistema leva a estabilizar. Pudemos verificar este facto nos sistemas de segunda ordem sub-amortecidos, em que o tempo de estabelecimento depende essencialmente da parte real dos pólos. Pudemos verificá-lo também nos sistemas sobre-amortecidos, nos quais aparece, no entanto, um facto novo e não menos importante, que é também válido para todos os sistemas, mesmo de ordem superior a 2:

*A velocidade de estabilização a longo prazo (assimptótica) depende apenas do pólo que esteja mais próximo do eixo imaginário. A estabilização é tanto mais lenta quanto mais próximo se encontrar esse pólo do eixo imaginário.*

Daqui resulta também que, *de todos os sistemas de segunda ordem com a mesma frequência natural, o que estabiliza mais rapidamente a longo prazo é o criticamente amortecido*, porque é aquele em que o pólo mais próximo do eixo imaginário está a maior distância deste.

Este último facto tem aplicação prática no desenho de diversos sistemas. Por exemplo, os aparelhos de medida de quadro móvel (de que são exemplo os voltímetros analógicos) podem ser modelados, com bastante precisão, como sistemas de segunda ordem só com pólos. Quando se aplica uma tensão a um voltímetro está-se a aplicar, essencialmente, um escalão, e pretende-se que o ponteiro estabilize o mais rapidamente possível. O atrito mecânico presente nestes sistemas é muito baixo, o que os torna fortemente sub-amortecidos. Sem mais alterações, ao ser aplicada uma tensão a um tal aparelho, o ponteiro oscilaria fortemente em torno do valor final, com oscilações cuja amplitude decresceria muito devagar. A solução que geralmente se adopta é colocar, no quadro móvel do aparelho, uma espira em curto-circuito. Esta, devido às correntes induzidas pelo campo magnético a que o quadro móvel está sujeito, actua como freio electromagnético (dissipa energia por efeito de Joule), fornecendo amortecimento suplementar. A espira é calculada de forma a que o sistema fique criticamente amortecido, para que o ponteiro estabilize o mais rapidamente possível.

### 4.2. Pólos não dominantes

Pudemos também verificar, nos sistemas sobre-amortecidos, que, quando os dois pólos se encontram a distâncias bastante diferentes do eixo imaginário, só o pólo mais próximo deste tem influência significativa na resposta do sistema ao escalão. Este facto verifica-se na generalidade dos sistemas, e não apenas nos de segunda ordem. Por outro lado, é fácil de perceber que um pólo que apresente, na decomposição em fracções simples da função de transferência do sistema, um resíduo muito pequeno, tem também uma influência muito pequena na resposta do sistema. Assim, designam-se geralmente por *pólos não dominantes*:

- aqueles que estejam muito mais afastados do eixo imaginário do que os pólos que se encontram mais próximos deste;
- aqueles que apresentem, na decomposição da função de transferência, um resíduo muito mais pequeno do que os maiores resíduos que ocorrem nessa decomposição.

Quando se pretende apenas obter uma aproximação da resposta ao escalão, é frequente eliminarem-se, da função de transferência, os pólos não dominantes. Ao fazê-lo há, no entanto, que ter o cuidado de ajustar o factor

multiplicativo da função de transferência de modo a manter inalterado o ganho estático do sistema, que determina o valor final da resposta ao escalão.