Sinais e Sistemas

1. Expresse os seguintes números complexos na forma cartesiana e determine o seu módulo, inverso e conjugado:

   i) $\frac{1}{2}e^{j9\pi/4}$ *ii)* $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{j\pi/4}+e^{j3\pi/4}\right)+e^{-j\pi}$ *iii)* $j(\sqrt{8}+j)e^{j3\pi/2}$

2. Expresse os seguintes números complexos na forma polar, determine o seu módulo, inverso e conjugado, e represente-os no plano complexo:

   i) -4 *ii)* $j(1+j5)$ *iii)* $\frac{\sqrt{3}+j^3}{1+j}$

3. Expresse os seguintes números complexos na forma cartesiana:

   i) $j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}-\frac{\sqrt{2}}{4}-j\frac{\sqrt{2}}{4}$ *ii)* $\frac{j}{-1+j}$ *iii)* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2}\right)^6$

4. Determine as soluções das seguintes equações:

   i) $x^2=1-j\sqrt{3}$ *ii)* $x^3=1+j$ *iii)* $x^4=-10j$

5. Calcule as seguintes expressões:

   i) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ *ii)* $\sum_{n=6}^{+\infty}\left(j\frac{1}{2}\right)^n$ *iii)* $\sum_{n=2}^{13}\frac{1}{2^n}e^{j\frac{\pi}{2}n}$

   iv) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{-n}e^{j\frac{\pi}{2}(n-4)}$ *v)* $\sum_{n=-\infty}^{3}2^n$ *vi)* $\sum_{n=-\infty}^{3}(-j2)^{n-2}$

6. Mostre que as seguintes expressões são verdadeiras:

   i) $\int_{-3}^{3}|x|e^{-x^2}dx=\int_{0}^{9}e^{-x}dx$

   ii) $\int_{2}^{4}e^{t-\tau/2}\sin(-t-\tau/2)d\tau=\int_{t-2}^{t-1}2e^{\tau}\sin(-2t+\tau)d\tau$

   iii) $\sum_{k=3}^{n}(k-5)^2=\sum_{k=-2}^{n-5}k^2$

   iv) $\sum_{k=-1}^{5}3^k e^{j\pi(n-k)}=3^n\sum_{k=n-5}^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^k e^{j\pi k}$

7. Sejam z, z_1 e z_2 números complexos arbitrários. Mostre que as seguintes expressões são verdadeiras:

i) $z + z^* = 2\Re e\{z\}$ *ii)* $zz^* = |z|^2$

iii) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$ *iv)* $z_1 z_2^* - z_1^* z_2 = -j2\Im m\{z_1^* z_2\}$

8. Expanda em fracções simples as seguintes funções racionais:

i) $\frac{4x+8}{x^2+12x+35}$ *ii)* $\frac{2}{x^2+6x+13}$ *iii)* $\frac{3x^2+21x+30}{x^2+4x+3}$

9. Seja

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1\left(\frac{t}{2}+3\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ y_2(t) &= x_2\left(\frac{t}{2}+3\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sabendo que

$$x_2(t) = x_1(t+T) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

diga, justificando, se

$$y_2(t) = y_1(t+T) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

é verdadeiro ou falso.

10. Seja

$$\begin{aligned} y(t) &= 2x(t) + x(2t-1) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ y_1(t) &= 2x_1(t) + x_1(2t-1) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ y_2(t) &= 2x_2(t) + x_2(2t-1) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sabendo que

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

diga, justificando, se

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

é verdadeiro ou falso.

11. Seja

$$x(3t+4) = 2t+7 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Determine x(t).

12. Seja

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases}$$

e

$$y(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases} \quad .$$

Determine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad .$$

13. Sabe-se que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |x(t)| < B \quad . \qquad (1)$$

Diga, justificando, se

$$\exists C > 0 : \quad |tx(t)| < C \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

é sempre verdadeiro ou falso, seja qual for o $x(t)$ que satisfaça a condição (1).

Soluções:

1. *i)* $\frac{1}{2}e^{j9\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4}$

   módulo: $\frac{1}{2}$

   inverso: $\sqrt{2} - j\sqrt{2}$

   conjugado: $\frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4}$

   ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{j\pi/4} + e^{j3\pi/4}\right) + e^{-j\pi} = -1 + j$

   módulo: $\sqrt{2}$

   inverso: $-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$

   conjugado: $-1 - j$

   iii) $j(\sqrt{8} + j)e^{j3\pi/2} = \sqrt{8} + j$

   módulo: 3

   inverso: $\frac{\sqrt{8}}{9} - j\frac{1}{9}$

   conjugado: $\sqrt{8} - j$

2. *i)* $-4 = 4e^{j\pi}$

   módulo: 4

   inverso: $\frac{1}{4}e^{-j\pi}$

   conjugado: $4e^{-j\pi}$

ii) $j(1+j5)=\sqrt{26}\mathrm{e}^{j2.9442}$ módulo: $\sqrt{26}$
inverso: $\dfrac{1}{\sqrt{26}}\mathrm{e}^{-j2.9442}$
conjugado: $\sqrt{26}\mathrm{e}^{-j2.9442}$

iii) $\dfrac{\sqrt{3}+j^3}{1+j}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\frac{7\pi}{12}}$ módulo: $\sqrt{2}$
inverso: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-j\frac{7\pi}{12}}$
conjugado: $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-j\frac{7\pi}{12}}$

3. *i)* 0 *ii)* $\dfrac{1}{2}-j\dfrac{1}{2}$ *iii)* -1

4. *i)* $x=\left\{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{6}}\ ;\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{j\frac{5\pi}{6}}\right\}$
ii) $x=\left\{\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{12}}\ ;\ \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}}\ ;\ \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{-j\frac{7\pi}{12}}\right\}$
iii) $x=\left\{\sqrt[4]{10}\mathrm{e}^{-j\frac{5\pi}{8}}\ ;\ \sqrt[4]{10}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{8}}\ ;\ \sqrt[4]{10}\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{8}}\ ;\ \sqrt[4]{10}\mathrm{e}^{j\frac{7\pi}{8}}\right\}$

5. *i)* $\dfrac{4}{3}$ *ii)* $-\dfrac{1}{80}\left(1+j\dfrac{1}{2}\right)$ *iii)* $\dfrac{1-2^{12}}{5\ 2^{12}}\left(1+j\dfrac{1}{2}\right)$
iv) ∞ *v)* 2^4 *vi)* $-\dfrac{8}{5}-j\dfrac{4}{5}$

8. *i)* $\dfrac{-6}{x+5}+\dfrac{10}{x+7}$ *ii)* $\dfrac{j1/2}{x+3+j2}+\dfrac{-j1/2}{x+3-j2}$ *iii)* $3+\dfrac{6}{x+1}+\dfrac{3}{x+3}$

9. É falso.

10. É verdadeiro.

11. $x(t)=\dfrac{2}{3}t+\dfrac{13}{3}$.

12. $y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right) & ;\quad t>0\\ 0 & ;\quad t<0\end{cases}$.

13. É falso.