Apêndice A

Identidades Matemáticas Elementares

A.1 Trigonometria

Considere o triangulo rectângulo representado na Figura A.1. Tem-se:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad ; \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad ; \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cot\theta} \quad ;$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad .$$

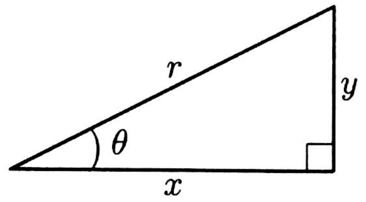

Figura A.1: Triângulo rectângulo

Outras identidades

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi \quad ;$$

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi \quad ;$$

$$\tan(\theta \pm \phi) = \frac{\tan\theta \pm \tan\phi}{1 \mp \tan\theta\tan\phi} \quad ;$$

$$\cot(\theta \pm \phi) = \frac{\cot\theta\cot\phi \mp 1}{\cot\phi \pm \cot\theta} \quad ;$$

$$\sin\theta\sin\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)] \ ;$$

$$\cos\theta\cos\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta-\phi) + \cos(\theta+\phi)] \ ;$$

$$\sin\theta\cos\phi = \frac{1}{2}[\sin(\theta-\phi) + \sin(\theta+\phi)] \ .$$

Tabela A.1: Valores particulares das funções trigonométricas

	0 rad π rad	$\pi/6$ rad $5\pi/6$ rad	$\pi/4$ rad $3\pi/4$ rad	$\pi/3$ rad $2\pi/3$ rad	$\pi/2$ rad $3\pi/2$ rad
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	± 1
cos	± 1	$\pm\sqrt{3}/2$	$\pm\sqrt{2}/2$	$\pm 1/2$	0
tan	0	$\pm\sqrt{3}/3$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\infty$
cot	$\pm\infty$	$\pm\sqrt{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}/3$	0

A.2 Números Complexos

Seja w um número complexo expresso na forma cartesiana por

$$w = x + jy \ ,$$

em que $j = \sqrt{-1}$, $x = \Re e\{w\}$ é a parte real de w, e $y = \Im m\{w\}$ é a parte imaginária de w. O número complexo w pode também ser expresso na forma polar como

$$w = re^{j\theta} \ ,$$

em que $r = |w|$ é o módulo de w e $\theta = \arg\{w\}$ é a fase de w. As representações cartesiana e polar de w estão representadas na Figura A.2.

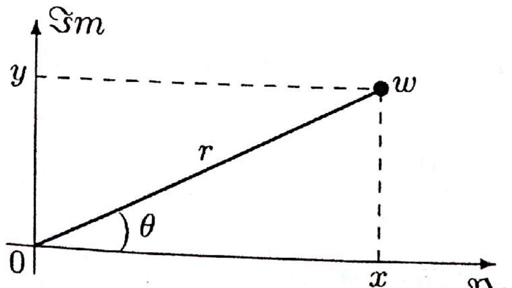

Figura A.2: Plano complexo

Conversão da forma cartesiana para a forma polar

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad .$$

Conversão da forma polar para a forma cartesiana

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \quad .$$

Complexo conjugado

$$w^* = x - jy = r\mathrm{e}^{-j\theta} \quad .$$

Inverso

$$w^{-1} = \frac{1}{x + jy} = \frac{w^*}{|w|^2} \quad .$$

Potências de números complexos

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad w^n = r^n \mathrm{e}^{j\theta n} \quad .$$

Raízes de números complexos

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\mathrm{e}^{j\theta}} = \mathrm{e}^{j(\theta + 2k\pi)/n} \quad , \quad k = 0, \ldots, n-1 \quad .$$

Fórmula de Euler

$$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad .$$

Outras identidades

$$ww^* = r^2 \quad ;$$

$$x = \Re e\{w\} = \frac{w + w^*}{2} \quad ;$$

$$y = \Im m\{w\} = \frac{w - w^*}{2j} \quad ;$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{j\theta} + \mathrm{e}^{-j\theta}}{2} \quad ;$$

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{j\theta} - \mathrm{e}^{-j\theta}}{2j} \quad .$$

A.3 Integrais definidos

Regras de integração

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad ;$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad ;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad ;$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad ;$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad .$$

Mudança de variável

$$\int_a^b f(u(x))dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\frac{dx}{du}du \quad .$$

Integração por partes

$$\int_a^b f(x)\frac{dg(x)}{dx} = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b \frac{df(x)}{dx}g(x)dx \quad .$$

A.4 Séries Geométricas

Seja $\beta \in \mathbb{C}$. Tem-se:

$$\sum_{n=k}^{N-1} \beta^n = \begin{cases} \beta^k \dfrac{1-\beta^{N-k}}{1-\beta} & , \ \beta \neq 1 \\ N-k & , \ \beta = 1 \end{cases} \quad ;$$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \beta^n = \beta^k \frac{1}{1-\beta} \quad , \quad |\beta| < 1 \quad .$$

Scanned by CamScanner