Decomposição em Fracções Simples

Luís Borges de Almeida

Março de 2012

1 Introdução

A decomposição de funções racionais em fracções simples (também chamadas fracções parciais ou fracções elementares) é uma operação matemática frequentemente empregue, por exemplo, no cálculo de transformadas (especialmente transformadas inversas) de Fourier, de Laplace e Z, mas também em diversas outras aplicações, de que é exemplo a primitivação de funções racionais. Na disciplina de Sinais e Sistemas do MEEC, IST, este tipo de decomposição utiliza-se sobretudo no cálculo de transformadas inversas de Fourier ou de Laplace de funções racionais. Este documento, preparado para os estudantes da referida disciplina, aborda a forma de proceder a essa decomposição. A intenção é apresentar a forma de proceder e não justificá-la, uma vez que se trata dum tópico já estudado pelos alunos em disciplinas de Matemática.

2 Conceito de decomposição em fracções simples

Começa-se por introduzir alguns conceitos básicos.

- **Função racional** – Chama-se função racional a qualquer função que seja dada pelo quociente de dois polinómios:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

- **Função racional própria** – Uma função racional diz-se *própria* se o grau do polinómio do numerador for inferior ao grau do polinómio do denominador. Por exemplo, das funções

$$\frac{4s-1}{s^2+s-2} \qquad \frac{3s^2+4s-1}{s^2+s-2},$$

a da esquerda é própria e a da direita é imprópria.

- **Fracção simples**[1] – Chamaremos fracções simples a funções da forma

$$\frac{A}{(s-p)^q},$$

em que s é a variável independente, A e p são constantes reais e q é um número natural.

O facto fundamental que está na base da decomposição em fracções simples é o seguinte:

> **Qualquer função racional *própria* é decomponível numa soma de fracções simples.**

Note-se que a decomposição se aplica apenas a funções racionais próprias, isto é, a funções em que o grau do numerador é inferior ao do denominador. Por exemplo, relativamente às funções indicadas acima, tem-se

$$\frac{4s-1}{s^2+s-2} = \frac{1}{s-1} + \frac{3}{s+2}.$$

A função

$$\frac{3s^2+4s-1}{s^2+s-2}$$

não é directamente decomponível em fracções simples por ser imprópria. Mais adiante veremos como lidar com funções deste tipo.

3 Forma da decomposição

No caso mais comum, em que as raízes do denominador são simples (isto é, não são múltiplas), a decomposição toma a forma

$$\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n}.$$

Caso existam raízes múltiplas no denominador, a cada uma corresponderá um número de fracções simples igual ao grau de multiplicidade dessa raiz, variando os graus dos denominadores dessas fracções desde 1 até ao grau de multiplicidade da raiz. Por exemplo,

$$\frac{N(s)}{(s-p_1)^2(s-p_2)^3} = \frac{A_{11}}{s-p_1} + \frac{A_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{A_{21}}{s-p_2} + \frac{A_{22}}{(s-p_2)^2} + \frac{A_{23}}{(s-p_2)^3}.$$

[1] O conceito de fracção simples que usamos aqui é apenas o adequado para uso nesta disciplina. O conceito pode ser definido de forma mais geral do que a aqui apresentada.

4 Cálculo dos numeradores

Tem-se verificado que, no geral, os alunos que frequentam a disciplina de Sinais e Sistemas só conhecem, para o cálculo dos numeradores das fracções simples, o método dos coeficientes indeterminados. Este método, embora correcto, é frequentemente muito trabalhoso, porque implica a resolução dum sistema de equações lineares cujas incógnitas são os valores dos numeradores. A dimensão deste sistema é, pois, igual ao grau do denominador da função racional a decompor, tornando-se rapidamente impraticável à medida que esse grau aumenta. A principal finalidade desta Secção é expor um método de cálculo directo[2] dos denominadores, utilizável na maior parte das situações. Neste caso dar-se-á uma breve justificação, uma vez que a maioria dos alunos de Sinais e Sistemas parece não ter estudado este método.

Começaremos pela justificação, que será dada apenas através dum exemplo, e indicaremos em seguida a forma prática de aplicar este método. Consideremos o primeiro exemplo usado acima,

$$\frac{4s-1}{s^2+s-2}=\frac{4s-1}{(s-1)(s+2)}.$$

Sabemos que a decomposição terá a forma

$$\frac{4s-1}{(s-1)(s+2)}=\frac{A_1}{s-1}+\frac{A_2}{s+2}. \tag{1}$$

Multiplicando ambos os membros por $s-1$, teremos

$$\frac{4s-1}{s+2}=A_1+(s-1)\frac{A_2}{s+2}. \tag{2}$$

Fazendo agora $s=1$, temos[3]

$$\frac{3}{3}=A_1+0\frac{A_2}{3},$$

e portanto $A_1=1$.

A forma prática de proceder pode, então, resumir-se na expressão seguinte:

$$A_1=\left.\frac{4s-1}{\cancel{(s-1)}(s+2)}\right|_{s=1},$$

que traduz a sequência de operações:

[2] Este método foi concebido por Oliver Heaviside, engenheiro inglês autor de enormes contributos para a ciência. Por exemplo, foi ele que deu às equações de Maxwell a forma actualmente utilizada, expressa em termos de operadores diferenciais sobre vectores. A forma original, de Maxwell, era composta por 20 equações diferenciais sobre 20 variáveis.

[3] Em rigor, a derivação que fizemos da igualdade (2) não é válida para $s=1$, porque (1) não é válida nesse ponto (ambos os membros têm um pólo nesse ponto). No entanto, a igualdade (2) é, de facto, válida nesse ponto, o que se poderia provar facilmente por um argumento baseado na continuidade.

1. Cancelar, no denominador da função racional, o termo correspondente ao pólo em causa.
2. Substituir a variável pelo valor desse pólo.

Podemos agora aplicar o método ao cálculo do numerador da segunda fracção:

$$A_2 = \left.\frac{4s-1}{(s-1)\cancel{(s+2)}}\right|_{s=-2} = \frac{-9}{-3} = 3.$$

Assim chegamos ao resultado que já tínhamos indicado,

$$\frac{4s-1}{s^2+s-2} = \frac{1}{s-1} + \frac{3}{s+2}.$$

Como facilmente se pode verificar por uma justificação semelhante à que demos acima, este método é aplicável também no caso de pólos múltiplos, mas apenas para o cálculo do numerador da fracção de maior grau. Por exemplo, para a função

$$\frac{1}{s^3-2s^2+s} = \frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_{21}}{s-1} + \frac{A_{22}}{(s-1)^2}$$

temos

$$A_{22} = \left.\frac{1}{s\,\cancel{(s-1)^2}}\right|_{s=1} = 1.$$

Podemos calcular A_1 pelo mesmo método:

$$A_1 = \left.\frac{1}{\cancel{s}\,(s-1)^2}\right|_{s=0} = 1.$$

Não podemos calcular A_{21} por este método.[4] Podemos, no entanto, usar o método dos coeficientes indeterminados, que se torna simples por já só termos um coeficiente para determinar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s-1)^2} &= \frac{1}{s} + \frac{A_{21}}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}\\ &= \frac{(A_{21}+1)s^2 - (A_{21}+1)s + 1}{s(s-1)^2}.\end{aligned}$$

Igualando os numeradores conclui-se facilmente que $A_{21} = -1$. Assim,

$$\frac{1}{s^3-2s^2+s} = \frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Repare-se que, se tivéssemos calculado todos os numeradores pelo método dos coeficientes indeterminados, teríamos tido de resolver um sistema de três equações lineares.

[4] Existem extensões deste método para o cálculo directo de todos os coeficientes correspondentes a pólos múltiplos, mas esse cálculo é já, normalmente, algo complexo, pelo que não o apresentamos aqui, optando antes pelo uso do método dos coeficientes indeterminados, que a generalidade dos alunos conhece bem.

5 Funções impróprias

Se, numa função racional, o grau do numerador não for menor que o do denominador, pode-se fazer uma decomposição da forma

$$\frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}.$$

em que o grau de $R(s)$ é já inferior ao do denominador. Aqui, as letras Q e R foram escolhidas propositadamente, por representarem, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de N por D.

Para calcular os polinómios Q e R (isto é, para efectuar a divisão de N por D) alguns alunos tendem a usar, novamente, o método dos coeficientes indeterminados, provavelmente por este ser o único que lhes foi ensinado. Mais uma vez, no entanto, esse método, embora correcto, é excessivamente trabalhoso. A divisão de polinómios pode ser feita por um método muito semelhante ao usado para a divisão de números inteiros.

Iremos, novamente, ilustrar o método por meio dum exemplo: a divisão do polinómio $6s^4 + 11s^3 + 2s^2 - 4s - 4$ por $3s^2 + s - 2$. Descreveremos a operação por passos:

- Começa-se por colocar os polinómios dividendo e divisor na posição habitual para a divisão:

$$\begin{array}{ccccccccc|l} 6s^4 & + & 11s^3 & + & 2s^2 & - & 4s & - & 4 & 3s^2+s-2 \\ \cline{10-10} \end{array}$$

- Em seguida determina-se o primeiro termo do quociente de forma a que, multiplicado pelo primeiro termo do divisor, iguale o primeiro termo do dividendo. No caso presente esse termo, multiplicado por $3s^2$, terá de igualar $6s^4$. Esse termo é, portanto, $2s^2$:

$$\begin{array}{ccccccccc|l} 6s^4 & + & 11s^3 & + & 2s^2 & - & 4s & - & 4 & 3s^2+s-2 \\ \cline{10-10} & & & & & & & & & 2s^2 \end{array}$$

- Multiplica-se esse termo pelo divisor e coloca-se o resultado sob o dividendo, alinhando os termos de graus iguais:

$$\begin{array}{ccccccccc|l} 6s^4 & + & 11s^3 & + & 2s^2 & - & 4s & - & 4 & 3s^2+s-2 \\ \cline{10-10} 6s^4 & + & 2s^3 & - & 4s^2 & & & & & 2s^2 \\ \cline{1-5} \end{array}$$

- Subtrai-se o polinómio assim obtido do dividendo:

$$\begin{array}{ccccccccc|l} \cancel{6s^4} & + & 11s^3 & + & 2s^2 & - & 4s & - & 4 & 3s^2+s-2 \\ \cline{10-10} \cancel{6s^4} & + & 2s^3 & - & 4s^2 & & & & & 2s^2 \\ \cline{1-5} & & 9s^3 & + & 6s^2 & & & & & \end{array}$$

  Neste passo há que ter em atenção que a operação é de *subtracção*. É frequente as pessoas fazerem confusão e efectuarem a soma em vez da subtracção.

- Baixa-se um termo do dividendo:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
\cancel{6s^4} & + & 11s^3 & + & 2s^2 & - & 4s & - & 4 & 3s^2+s-2 \\ \cline{10-10}
\cancel{6s^4} & + & 2s^3 & - & 4s^2 & & & & & 2s^2 \\ \cline{1-5}
 & & 9s^3 & + & 6s^2 & - & 4s & & &
\end{array}$$

- A partir daqui a operação é repetitiva: determina-se o valor do termo seguinte do quociente e multiplica-se pelo divisor,

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
\cancel{6s^4} & + & 11s^3 & + & 2s^2 & - & 4s & - & 4 & 3s^2+s-2 \\ \cline{10-10}
\cancel{6s^4} & + & 2s^3 & - & 4s^2 & & & & & 2s^2+3s \\ \cline{1-5}
 & & 9s^3 & + & 6s^2 & - & 4s & & & \\
 & & 9s^3 & + & 3s^2 & - & 6s & & &
\end{array}$$

- Em seguida efectua-se a subtracção e baixa-se um novo termo do dividendo,

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
\cancel{6s^4} & + & 11s^3 & + & 2s^2 & - & 4s & - & 4 & 3s^2+s-2 \\ \cline{10-10}
\cancel{6s^4} & + & 2s^3 & - & 4s^2 & & & & & 2s^2+3s \\ \cline{1-5}
 & & \cancel{9s^3} & + & 6s^2 & - & 4s & & & \\
 & & \cancel{9s^3} & + & 3s^2 & - & 6s & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & 3s^2 & + & 2s & - & 4 &
\end{array}$$

- E novamente se repetem essas operações:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
\cancel{6s^4} & + & 11s^3 & + & 2s^2 & - & 4s & - & 4 & 3s^2+s-2 \\ \cline{10-10}
\cancel{6s^4} & + & 2s^3 & - & 4s^2 & & & & & 2s^2+3s+1 \\ \cline{1-5}
 & & \cancel{9s^3} & + & 6s^2 & - & 4s & & & \\
 & & \cancel{9s^3} & + & 3s^2 & - & 6s & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & \cancel{3s^2} & + & 2s & - & 4 & \\
 & & & & \cancel{3s^2} & + & s & - & 2 & \\ \cline{5-9}
 & & & & & & s & - & 2 &
\end{array}$$

- A operação está terminada, porque já atingimos o termo de grau zero no polinómio que foi sendo construído por baixo do divisor. Este polinómio é o quociente, e é, no nosso caso, $2s^2 + 3s + 1$. O resto é o resultado obtido na última subtracção, $s - 2$.

Na sequência deste exemplo podemos, portanto, fazer a decomposição

$$\frac{6s^4 + 11s^3 + 2s^2 - 4s - 4}{3s^2 + s - 2} = 2s^2 + 3s + 1 + \frac{s-2}{3s^2+s-2},$$

em que figura já uma função racional própria, que é decomponível em fracções simples.

Na divisão de polinómios pode ocorrer uma situação para a qual vale a pena chamar-se a atenção. Considere-se a seguinte divisão:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
\cancel{3s^4} & + & 10s^3 & - & 2s^2 & + & 2s & + & 6 & |s^3+3s^2 \\ \cline{10-10}
\cancel{3s^4} & + & 9s^3 & & & & & & & 3s+1 \\ \cline{1-3}
 & & \cancel{s^3} & + & 2s^2 & & & & & \\
 & & \cancel{s^3} & + & 3s^2 & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & -5s^2 & + & 2s & & &
\end{array}
$$

Neste ponto poder-se-ia esperar que o passo seguinte fosse juntar mais um termo ao quociente. No entanto tal não é possível, uma vez que já se atingiu, neste, o termo de ordem zero. O que há a fazer é, então, simplesmente baixar os restantes termos do dividendo, e a divisão está terminada:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
\cancel{3s^4} & + & 10s^3 & - & 2s^2 & + & 2s & + & 6 & |s^3+3s^2 \\ \cline{10-10}
\cancel{3s^4} & + & 9s^3 & & & & & & & 3s+1 \\ \cline{1-3}
 & & \cancel{s^3} & + & 2s^2 & & & & & \\
 & & \cancel{s^3} & + & 3s^2 & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & -5s^2 & + & 2s & + & 6 &
\end{array}
$$

O quociente é $3s + 1$ e o resto inclui os termos baixados do dividendo: $-5s^2 + 2s + 6$.

Pode parecer que este caso é diferente do primeiro que apresentámos, mas de facto só o é na aparência. O que se passa é que o polinómio divisor tem os coeficientes dos termos de grau mais baixo nulos, e nós não os escrevemos na divisão. Se tivéssemos usado o polinómio completo e tivéssemos também escrito, na divisão, todos os termos nulos, a divisão teria terminado da forma normal:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
\cancel{3s^4} & + & 10s^3 & - & 2s^2 & + & 2s & + & 6 & |s^3+3s^2+0s+0 \\ \cline{10-10}
\cancel{3s^4} & + & 9s^3 & + & 0s^2 & + & 0s & & & 3s+1 \\ \cline{1-7}
 & & \cancel{s^3} & + & 2s^2 & + & 2s & & & \\
 & & \cancel{s^3} & + & 3s^2 & + & 0s & + & 0 & \\ \cline{3-9}
 & & & & -5s^2 & + & 2s & + & 6 &
\end{array}
$$

Como habitualmente não se escrevem estes termos nulos, os alunos deverão estar atentos à possibilidade de a divisão terminar da forma que ocorreu neste exemplo e da necessidade de, nesse caso, se baixarem os restantes termos do dividendo para se obter o resto da divisão.

6 Exemplos

Conclui-se este documento com alguns exemplos de aplicação dos métodos estudados. Para simplificar a notação, os numeradores das fracções simples são representados por letras consecutivas sem índices.

Exemplo 1

$$\frac{5s+1}{s^2+2s-15} = \frac{5s+1}{(s-3)(s+5)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+5}.$$

$$A = \left.\frac{5s+1}{\cancel{(s-3)}(s+5)}\right|_{s=3} = 2.$$

$$B = \left.\frac{5s+1}{(s-3)\cancel{(s+5)}}\right|_{s=-5} = 3.$$

Exemplo 2

$$\frac{s+1}{s^2-2s+1} = \frac{s+1}{(s-1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2}.$$

$$B = \left.\frac{s+1}{\cancel{(s-1)^2}}\right|_{s=1} = 2.$$

Para o cálculo de A usamos o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{(s-1)^2} &= \frac{A}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} \\ &= \frac{As + (2-A)}{(s-1)^2}, \end{aligned}$$

e portanto $A = 1$.

Exemplo 3

$$\frac{3s-4}{2s^2-6s+4} = \frac{3s-4}{2(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}.$$

Notar que, para usar o método de cálculo directo que estudámos, nos monómios do denominador a variável independente tem de figurar com o coeficiente 1. Não poderíamos ter factorizado, por exemplo, na forma $(2s-2)(s-2)$.[5]

$$A = \left.\frac{3s-4}{2\,\cancel{(s-1)}(s-2)}\right|_{s=1} = 1/2.$$

[5] Seria possível, de facto, usar-se uma factorização desse tipo no método directo, mas tal prestar-se-ia facilmente a confusões, pelo que não se explica aqui a forma de o fazer.

$$B = \left.\frac{3s-4}{2(s-1)\cancel{(s-2)}}\right|_{s=2} = 1.$$

Exemplo 4

Retomando o exemplo de divisão de polinómios dado acima,

$$\begin{aligned}
\frac{6s^4+11s^3+2s^2-4s-4}{3s^2+s-2} &= 2s^2+3s+1+\frac{s-2}{3s^2+s-2} \\
&= 2s^2+3s+1+\frac{s-2}{3\left(s-\frac{2}{3}\right)(s+1)} \\
&= 2s^2+3s+1+\frac{A}{\left(s-\frac{2}{3}\right)}+\frac{B}{s+1},
\end{aligned}$$

$$A = \left.\frac{s-2}{3\cancel{\left(s-\frac{2}{3}\right)}(s+1)}\right|_{s=\frac{2}{3}} = -\frac{4}{15},$$

$$B = \left.\frac{s-2}{3\left(s-\frac{2}{3}\right)\cancel{(s+1)}}\right|_{s=-1} = \frac{3}{5}.$$