Matemática mente, mentindo!...*

Originalidades e outras invenções na resolução de um problema de exame da disciplina de Sinais e Sistemas

Carlos F. Bispo†

Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Área Científica de Sistemas de Decisão e Controlo

Fevereiro, 2011

Resumo

Onde se descrevem as múltiplas desventuras em resoluções acidentadas de um problema no enunciado de exame da disciplina de Sinais e Sistemas. Enuncia-se o problema em questão e a sua resolução correcta.

O texto apresenta um conjunto significativo e representativo das resoluções mais gritantemente erradas, naquilo que revelam ser falta de conhecimentos sólidos de matemática de alunos de terceiro ano no Instituto Superior Técnico.

Pretende-se desabafar, ao jeito de quem cava um buraco na terra para gritar lá para dentro que o príncipe tem orelhas de burro. Haverá flautas depois?...

1 Introdução

Neste documento faz-se uma análise do estado de literacia matemática de uma amostra de alunos do IST. Nomeadamente, dos alunos inscritos na disciplina de Sinais e Sistemas no primeiro semestre do ano lectivo de 2010/11, em torno da resolução de um dos problemas do enunciado de exame e repescagem de testes, que decorreu em 29 de Janeiro de 2011. O número total de inscritos na disciplina foi de 221, sendo 50 alunos do curso de Engenharia Biomédica e os restantes do curso de Engenharia Electrotécnica e de Computadores. Ao exame e repescagem de testes anteriores compareceram 124 alunos.

A motivação para escrever este texto surgiu durante a correcção do exercício, perante o rol de disparates e originalidades detectados na resolução de um problema relativamente trivial e pelo estado de desespero e frustação que tal provocou em mim. O objectivo do texto é contribuir para um melhor entendimento do estado de absoluto caos em que se encontram os conhecimentos de matemática dos alunos em geral.

Na próxima secção apresenta-se o problema e a sua resolução correcta, identificando-se os aspectos da resolução que requerem conhecimentos da disciplina de Sinais e Sistemas, sendo os restantes meras aplicações de conceitos formais e operacionais que deveriam ser dominados pelos alunos que se inscrevem a esta disciplina. Na Secção 3 faz-se uma síntese das resoluções erradas mais significativas, em termos de volume e significado. O texto termina com um conjunto de reflexões na Secção 4.

Apesar de o tom geral do texto ser irónico, e nalgumas passagens jocoso, o assunto é verdadeiramente sério e preocupante. Ou pelo menos, deveria preocupar seriamente todos os docentes do IST em geral, e os docentes do DEEC em particular. Não falo da preocupação que se tem como quem diz "Pois é! É um problema... oh que chatice. Estou mesmo preocupado... vai um café?" Essa será uma postura mais consentânea com a cultura Gato Feforento. Em todo o caso, não se deverá confundir o tom usado com qualquer sentimento de superioridade ou elitismo.

Uma nota de navegação para os leitores: se da secção 3.2 em diante lhe escapar onde está o problema ou o erro, o meu conselho é que se inscreva de novo e faça com seriedade as disciplinas de Análise Matemática, ou mesmo revisite os seus compêndios de matemática do liceu.

*Porque adiante se falará de património cultural, este título inspira-se na suposta forma como ironicamente se aludia a Fernão Mendes Pinto após a publicação da Peregrinação, devido às suas histórias e relatos fantásticos: Fernão, mentes? Minto!... Também por ele perpassa uma vénia ao poeta fingidor de Fernando Pessoa.

†Leccionou uma turma teórica de Sinais e Sistemas pela primeira vez no primeiro semestre do ano lectivo de 2010/11.

2 O problema e sua correcta resolução

O problema 5 do enunciado colocava o seguinte desafio.

Problema 1 *Considere o sinal de tempo contínuo* $x(t) = 2e^{-t}u(t)$.

a) Calcule a energia total do sinal.

b) Admita que este sinal é colocado à entrada dum filtro passa-baixo ideal real, de frequência de corte $\omega_c = 4$. *Calcule a energia total do sinal de saída.*

Sugestão: *Faça o cálculo no domínio da frequência. Uma primitiva de* $\frac{1}{1+x^2}$ *é* arctg x. *Pode exprimir o resultado usando a função* arctg *quando não se trate dum dos casos notáveis dessa função.*

O enunciado acima corresponde à primeira versão do exame. Na segunda versão, $x(t) = 3e^{t}u(-t)$ e $\omega_c = 5$. O texto vai centrar-se apenas na primeira versão, apesar de os exemplos de erros de resolução terem sido retirados de ambas as versões. Para a resolução deste problema, os alunos teriam que saber qual a definição de energia de um sinal, teriam que conhecer a relação de Parseval, teriam que saber que sinal se representa por $u(t)$ (ou $u(-t)$), teriam que saber calcular a Transformada de Fourier de $x(t)$, teriam que saber qual a descrição em frequência de um filtro passa-baixo ideal real, mais concretamente qual o módulo do ganho, e ainda teriam que conhecer a propriedade da convolução para Transformadas de Fourier. Estes são os únicos elementos específicos da disciplina de Sinais e Sistemas que é necessário conhecer para resolver este problema.

Pretendia avaliar-se se os alunos sabiam que a energia de um sinal é dada por

$$\mathrm{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \tag{1}$$

e que, definindo como $X(j\omega)$ a Transformada de Fourier de $x(t)$, a relação de Parseval estabelece que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega, \tag{2}$$

constando esta relação do formulário autorizado em exame. O sinal $u(t)$ é o escalão unitário, em que $u(t) = 0$ para $t < 0$ e $u(t) = 1$ para $t \geq 0$, sendo que $u(-t)$ troca os intervalos onde se tem o valor nulo e unitário. A Transformada de Fourier de $x(t)$ retira-se do formulário autorizado no exame como sendo

$$X(j\omega) = \frac{2}{1 + j\omega}. \tag{3}$$

O módulo do ganho de um filtro passa-baixo ideal real com frequência de corte ω_c é 1 para $\omega \in [-\omega_c, \omega_c]$ e zero fora daquele intervalo. Quanto à propriedade da convolução, ela estabelece que se pode obter a Transformada de Fourier do sinal de saída de um sistema linear e invariante no tempo através do produto das Transformadas de Fourier do sinal de entrada e da resposta impulsiva desse sistema.

Posto isto, a resolução da primeira alínea consistia na seguinte sequência de passos.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} |2e^{-t}|^2 dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} 4e^{-2t} dt \\
&= 4\,[\frac{e^{-2t}}{-2}]\Big|_0^{\infty} \\
&= 4\left(\frac{e^{-\infty}}{-2} - \frac{e^{0}}{-2}\right) \\
&= 4\left(0 + \frac{1}{2}\right) \\
&= 2
\end{aligned} \tag{4}$$

Para a segunda alínea esperava-se a resolução seguinte. Seja $y(t)$ o sinal à saída do filtro dado.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[y(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-4}^{4} |X(j\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-4}^{4} \left|\frac{2}{1+j\omega}\right|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-4}^{4} \frac{4}{1+\omega^2} d\omega \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\mathrm{arctg}(w)\right]\Big|_{-4}^{4} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\mathrm{arctg}(4) - \mathrm{arctg}(-4)\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\mathrm{arctg}(4). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Uma nota final para informar que, durante a construção do enunciado do exame, se optou por substituir $x(t) = 2e^{-2t}u(t)$ pelo valor indicado anteriormente, com receio que os alunos não aplicassem correctamente a mudança de variável adequada na resolução da segunda alínea. Notar que no caso aqui especificado, $X(j\omega) = 2/(1 + j2\omega)$, o que implicaria ser $|X(j\omega)|^2 = 4/(1 + 4\omega^2)$, que poderia prestar-se a grandes originalidades na utilização da sugestão que acompanhava o enunciado da segunda alínea. Mesmo assim, adiante se verá que originalidade foi coisa que não faltou.

3 Contando como foi

Nesta secção indicam-se as resoluções mais representativas encontradas. Vai dar-se naturalmente ênfase aos erros que não decorrem de falta de conhecimento de matéria específica da disciplina de Sinais e Sistemas. Primeiro ir-se-á detalhar os erros decorrentes de desconhecimento na disciplina.

3.1 Não sabem aspectos da matéria de Sinais e Sistemas

Na resolução da primeira alínea, e a título de exemplo, considera-se erro específico da disciplina indicar que a energia do sinal dado se obtém através da expressão abaixo.

$$
\mathrm{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt. \qquad (6)
$$

Dos 124 alunos, apenas 108 esboçaram alguma intenção de resolver este problema. De todos os alunos que escreveram alguma expressão para o cálculo da energia, apenas 17 alunos indicaram a expressão acima. De todos os alunos que explicitaram alguma expressão para o cálculo da energia, o número que usou uma expressão correcta foi de 73 alunos. Os restantes, ou não explicitaram qualquer expressão, ou não tentaram resolver o problema ou explicitaram expressões diferentes daquelas duas. No entanto, apesar de 73 alunos terem apresentado a expressão correcta para o cálculo da energia, apenas 32 tiveram a cotação máxima e 42 tiveram nota igual ou superior a 80% da cotação máxima.

Relativamente à segunda alínea um número semelhante de alunos explicitou a relação de Parseval, a menos de pequenos erros como esquecer o factor $1/2\pi$. Neste caso, apenas 6 alunos tiveram cotação máxima e apenas 15 tiveram nota igual ou superior a 80% da cotação máxima.

As dificuldades exibidas prendem-se mais com a falta de domínio de ferramentas básicas de álgebra e cálculo integral.

3.2 Sobre a arte do improviso e da criatividade matemática

Nesta secção detalham-se algumas resoluções erradas para os primeiros passos, sem se indicar a sua frequência relativa. Importa apenas reter que os casos que aqui se apresentam são os mais representativos.

Para a primeira alínea, muitos alunos mostraram não saber como calcular o quadrado do módulo de $x(t)$. Exemplos deste caso são

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |2e^{-t}u(t)|^2 dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} 2e^{-2t} dt, \end{aligned} \tag{7}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |2e^{-t}u(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-2|t|} dt, \end{aligned} \tag{8}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |2e^{-t}u(t)|^2 dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} 4e^{-t^2} dt, \end{aligned} \tag{9}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |2e^{-t}u(t)|^2 dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} 4e^{-t} dt, \end{aligned} \tag{10}$$

Houve alunos que optaram por calcular a energia do sinal a partir da sua densidade espectral. De entre as originalidades apresentadas, os erros mais comuns estão apresentados abaixo, de onde se salienta que o facto de a função ser complexa não produz grandes sobressaltos no cálculo do seu módulo.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[x(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{2}{1+j\omega} \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(1+j\omega)^2} d\omega, \end{aligned} \tag{11}$$

ou então

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[x(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{2}{1+j\omega} \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1+(j\omega)^2} d\omega, \end{aligned} \tag{12}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[x(t)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{t}\left|\frac{2}{1+j\omega}\right|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{t}\frac{4}{1+(j\omega)^2} d\omega, \qquad (13)
\end{aligned}$$

Noutros casos, presumivelmente porque o sinal $x(t)$ só é não nulo para valores positivos de t, a expressão apresentada foi a seguinte.

$$\mathrm{E}[x(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega. \qquad (14)$$

Também houve quem propusesse o seguinte.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[x(t)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{2}{1+j\omega}\right|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)^2 d\omega, \qquad (15)
\end{aligned}$$

Para a segunda alínea os erros encontrados são semelhantes aos já identificados nas últimas expressões. Outro erro ainda não apresentado e específico das resoluções da segunda alínea é

$$\mathrm{E}[x(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4}|X(j\omega)|^2 d\omega. \qquad (16)$$

Este erro, e alguns dos anteriores, deve-se a deficiente domínio da matéria específica da disciplina.

3.3 Novas propriedades da primitivação

A secção anterior detalhou os acidentes ocorridos na passagem da primeira para a terceira linha da resolução (4) e na passagem da primeira para a quinta linha da resolução (5). Nesta secção descrevem-se os casos notáveis que se lhes seguiram.

Regra geral, para quem resolveu a primeira alínea por integração no tempo não existem erros de integração dignos de nota. Apenas alguns episódios singulares que, apesar disso, merecem nota e a seguir se detalham.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}|2e^{-t}|^2 dt \\
&= \left.\frac{(2e^{-t})^3}{3}\right|_{-\infty}^{+\infty}, \qquad (17)
\end{aligned}$$

e a sua variante alternativa

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{0}|2e^{-t}|^2 dt \\
&= 2\int_{-\infty}^{0}(e^{-t})^2 dt \\
&= 2\int_{-\infty}^{0}e^{t^2} dt \\
&= 2\left.\frac{e^{t^2}}{2t^3}\right|_{-\infty}^{0}, \qquad (18)
\end{aligned}$$

ou

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[x(t)] &= \int_0^{+\infty} 4e^{-2t}dt \\
&= \left.\frac{4e^{-2t}}{-2}\right|_0^{+\infty} \\
&= e^{-2},
\end{aligned} \tag{19}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt.t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-2|t|}dt.t \\
&= 4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}dt.t + 4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}dt.t \\
&= 4\left.\frac{e^{-2t}}{-2}\right|_{-\infty}^{+\infty}.t + 4\left.\frac{e^{2t}}{2}\right|_{-\infty}^{+\infty}.t \\
&= ...
\end{aligned} \tag{20}
$$

Onde a verdadeira desgraça se deu foi na segunda alínea e para quem resolveu a primeira alínea por integração da densidade espectral. Aqui a variedade é menor, mas a frequência relativa é maior. De entre os alunos que calcularam correctamente o quadrado de módulo de $X(j\omega)$, uma resolução frequente é a que a seguir se apresenta.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[y(t)] &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{4}{1+\omega^2}d\omega \\
&= \frac{4}{2\pi}\mathrm{arctg}(\omega),
\end{aligned} \tag{21}
$$

para todas as possíveis instanciações de a e b discutidas na secção anterior. Esta solução denota confusão entre primitiva de uma função e integral da mesma função. Não se estranha que o integral em ω de uma função de ω seja também uma função de ω. Outro caso notável é apresentado de seguida.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[y(t)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-4}^{4} \frac{2}{1+j\omega}d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\left.\mathrm{arctg}(\sqrt{j\omega})\right|_{-4}^{+4}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Neste caso temos como parte da solução um arco cuja tangente é um número complexo!!! Finalmente, outra solução possível é

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[y(t)] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^4 \left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)^2 d\omega \\
&= \frac{4}{2\pi}\left.\mathrm{arctg}^2(\omega)\right|_0^4.
\end{aligned} \tag{23}
$$

3.4 A incontornável falta de sentido crítico

Alguns alunos, por erros de sinais ou outros, obtiveram na primeira ou na segunda alínea um valor negativo para a energia. Tal não lhes abalou qualquer crença, dado que nenhum manifestou estranheza pelo facto de o integral de uma função sempre positiva poder produzir um número negativo, por um lado. Por outro lado, não estranharam o conceito de energia negativa.

Outros houve que conseguiram a proeza fantástica de obter um valor imaginário para a energia. Também estes não se sentiram minimamente perturbados, quiçá pensando nalgum guião de filme barato de ficção científica.

Isto para não falar da falta de consistência entre os resultados das duas alíneas, quando tal aconteceu. Isto é, o facto de a solução da primeira alínea não corresponder ao $\lim_{\omega_c} \to \infty$ da solução da segunda.

4 Reflexão ou um professor à beira de um ataque de nervos

A sensação com que fica um docente que durante todo o semestre se empenhou em ser rigoroso na exposição, mas sempre fazendo apelo à compreensão intuitiva dos objectos formais manipulados, é que durante todo o semeste se andou a falar uma qualquer língua estrangeira para um número muito significativo de alunos.

Constato que o património cultural, visto aqui na sua dimensão técnica e científica, não é de todo comum a professores e alunos. Ou melhor dizendo, a intersecção dos dois patrimónios é muito exígua. Creio que todos partimos sempre do princípio que existem referências culturais partilhadas pelo corpo docente e discente e que a sua existência é o garante de que nos fazemos entender quando interagimos uns com os outros.

Por exemplo, se para um aluno médio o cálculo do módulo de uma função complexa ou de uma função real não justifica diferenças, fica-se com a sensação que seremos vistos como manientos e picuinhas. Se para um aluno médio a energia de um sinal tanto pode ser positiva, como negativa ou ainda imaginária pura, então o que é que partilhamos?

Assim se poderá entender também por que razão os alunos se evadem das aulas teóricas muito cedo no semestre. As nossas aulas não têm legendas. Sobram só as aulas práticas onde, a troco de um sacrifício presencial de 90 minutos, se ganham umas prescrições para levantar na farmácia mais próxima, com prazo de validade muito curto e baixo espectro de acção fungicida ou antibiótica.

A análise das várias soluções erradas atrás apresentadas, não pode deixar de colocar a seguinte questão: Como é que estes alunos obtiveram aprovação às sucessivas disciplinas de matemática a que foram expostos desde os seus tempos de liceu? A confusão que os exemplos revelam estar presente na cabeça dos alunos leva-me a concluir que não existe raciocínio nem saber, apenas se registaram umas quantas *"templates"* que se aplicam sem critério, ao jeito do vale tudo como quem faz uma salada russa.

A continuar assim, e mesmo com as cautelas e caldos de galinha colocados na elaboração de enunciados de exame que não façam apelo a instrumentos mais sofisticados[1], a disciplina de Sinais e Sistemas continuará a ser um obstáculo difícil de transpor para muitos alunos, enquanto insistir em entender, **e bem**, que os alunos têm que saber usar a cabeça e ser capazes de resolver problemas cuja estrutura de solução coloca novos desafios, assim como continuar a assumir domínio na utilização de instrumentos formais por parte destes.

[1]Primitivação por partes, por exemplo.