Exame de Compressão e Codificação de Dados

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
25 de Janeiro de 2005

Nome: _____ Número: _____

NOTAS:

1. A prova tem a duração de 2h 30m;

2. Cotação da Parte I: resposta certa - 0.5 valores; resposta errada - 0.25 valores;

3. Salvo indicação explícita, todos os logaritmos são em base 2 e todas as entropias, comprimentos médios de códigos e capacidades de canal estão expressas em bits/símbolo.

BOA SORTE!

Parte I

1. Seja X uma variável aleatória com valores num conjunto finito e $Y = \cos(X)$. Relativamente às entropias $H(X)$ e $H(Y)$ pode afirmar-se:

   a) $H(X)$ é sempre maior do que $H(Y)$. ☐
   b) $H(Y)$ pode ser maior do que $H(X)$. ☐
   c) $H(Y)$ pode ser igual a $H(X)$. ■

2. Seja $X \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ uma variável aleatória em que pelo menos um valor de $p(x_i)$ verifica $0 < p(x_i) < 1/n$. Relativamente a $H(X)$ pode afirmar-se:

   a) O valor máximo de $H(X)$ é $\log n$. ☐
   b) O valor mínimo de $H(X)$ é 0. ☐
   c) Nenhuma da anteriores. ■

3. Considere o par de variáveis aleatórias $X, Y \in \{0, 1\}$, com probabilidade $p(0,0) = 1/3$, $p(0,1) = 1/3$, $p(1,0) = 0$ e $p(1,1) = 1/3$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

   a) $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$. ☐
   b) $H(Y|X = 1) = 0$. ■
   c) $H(Y|X) = \log 3$. ☐

4. Considere as variáveis aleatórias do exemplo anterior. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

   a) $I(X;Y) = \log 3$. ☐
   b) $I(X;Y) = \log 3 - \frac{2}{3}$. ☐
   c) $I(X;Y) = \log 3 - \frac{4}{3}$. ■

5. Considere as variáveis aleatórias da pergunta 3 e defina-se $Z = 2X + Y$. Tem-se

   a) $H(Z) = \log 3$. ■
   b) $H(Z) = \log 4$. ☐
   c) $H(Z) = \log 2$. ☐

6. Qual dos seguintes códigos é instantâneo?

   a) $\{00, 10, 01, 11\}$. ■
   b) $\{0, 01, 110, 111\}$. □
   c) $\{1, 11, 010, 011\}$. □

7. Seja $X \in \mathcal{X}$ uma variável aleatória, $C : \mathcal{X} \to \mathcal{D}^*$ um código instantâneo óptimo D-ário, $L(C)$ o comprimento médio de C e $H(X)$ a entropia de X. Então

   a) $L(C) < H(X)$. □
   b) $L(C) = H(X)$ se os símbolos forem equiprováveis. □
   c) $L(C) = H(X)$ se e só se as probabilidades dos símbolos forem potências de D^{-1}. ■

8. Uma fonte gera os símbolos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ com probabilidades $(1/3, 1/3, 1/6, 1/6)$. O comprimento médio do código óptimo para esta fonte verifica:

   a) $L(C) = 2$. ■
   b) $L(C) < 2$. □
   c) $L(C) > 2$. □

9. Uma fonte gera os símbolos $\{x_1, x_2, x_3\}$ com probabilidades $(1/2, 1/4, 1/4)$. O comprimento médio do código óptimo para uma extensão de ordem 2 desta fonte é

   a) $L(C_2) = 3$. ■
   b) $L(C_2) > 3$. □
   c) $L(C_2) < 3$. □

10. Considere a variável aleatória X que toma 4 valores diferentes com probabilidades $(1/3, 1/3, 1/4, 1/12)$. Uma solução possível para os comprimentos (l_1, l_2, l_3, l_4) das palavras obtidas pelo procedimento de Huffman é

    a) $(1, 2, 3, 4)$. □
    b) $(1, 3, 3, 4)$. □
    c) $(2, 2, 2, 2)$. ■

11. Considere uma fonte com um alfabeto de 5 símbolos e três códigos binários com as seguintes distribuições de comprimentos [i.e., $(l_1, \ldots, l_5)$]: código I -(3,3,3,3,3), código II -(1,2,1,1,1), código III -(1,2,3,4,4). Quais destes códigos podem ser instantâneos?

    a) Apenas os códigos I e II. □
    b) Todos. □
    c) Apenas. os códigos I e III ■

12. Considere um fonte binária, Markoviana, com as seguintes probabilidades de transição

$P(X_n \mid X_{n-1})$	$X_n = 1$	$X_n = 2$
$X_{n-1} = 1$	0	1
$X_{n-1} = 2$	1/2	1/2

    Qual das seguintes sequências é mais provável:

    a) 122222222. □
    b) 121212121. ■
    c) 121212112. □

13. A distribuição estacionária de probabilidades (μ_1, μ_2) do problema 12 verifica:

    a) $\mu_1 = \mu_2$. □
    b) $\mu_2 > \mu_1$. ■
    c) $\mu_2 < \mu_1$. □

14. A taxa de entropia $H(\mathcal{X})$ da cadeia de Markov do problema 12 verifica:

a) $H(\mathcal{X}) = 1$. ☐

b) $H(\mathcal{X}) > 1$. ☐

c) $H(\mathcal{X}) < 1$. ■

15. Considere um fonte ternária, Markoviana, com as seguintes probabilidades de transição

$P(X_n \| X_{n-1})$	$X_n = 1$	$X_n = 2$	$X_n = 3$
$X_{n-1} = 1$	0	1	0
$X_{n-1} = 2$	1/3	1/3	1/3
$X_{n-1} = 3$	1	0	0

Qual das seguintes distribuições é a estacionária desta fonte

a) $(1/3, 1/3, 1/3)$. ☐

b) $(2/3, 1/6, 1/6)$. ☐

c) Nenhuma das anteriores. ■

16. As técnicas de compressão por dicionário são adequadas para os seguintes tipos de cenário:

a) Fontes sem memória ☐

b) Fontes que geram um pequeno número de padrões muito frequentes. ■

c) Fontes que geram um grande número de padrões pouco frequentes. ☐

17. Um codificador LZ78 produziu a seguinte sequência: $(0, c(w)), (0, c(a)), (0, c(b)), (3, c(a)), (0, c(y)), (1, c(a)), (3, c(b))$. Qual a sequência codificada?

a) *wabbaywab*. ☐

b) *wabbaywabb*. ■

c) *wabaywabb*. ☐

18. A entropia diferencial de uma variável aleatória X gaussiana de variância σ^2 é $h(X) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$, isto significando que:

a) São necessários $h(X)$ bits para representar X. ☐

b) São necessários $h(X)$ bits para representar uma aproximação quantizada de X. ☐

c) A entropia de uma quantização a n bits de X é aproximadamente $h(X) + n$. ■

19. A função ritmo-distorção para uma fonte de Bernoulli(p) com distorção de Hamming é dada por $R(D) = H(p) - H(D)$ para $0 \leq D \leq \min\{p, 1-p\}$ e zero fora. Admitindo que a distorção $D = P(X \neq \widehat{X}) = 1/8$ e que $p = 1/4$ tem-se R = 0.268. Tal significa que

a) Existe um código $(2^R, 1)$ tal que $D \leq 1/8$. ☐

b) Existe uma sequência de códigos $(2^{nR}, n)$ tal que no limite quando n tende para infinito $D \leq 1/8$. ■

c) Nenhuma das anteriores. ☐

20. Considere a fonte discreta sem memória gerando símbolos $X \in \{\mathcal{X}_1 \bigcup \mathcal{X}_2\}$ onde $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ são alfabetos disjuntos equiprováves com N_1 e N_2 símbolos, respectivamente. As fontes $X_1 \in \mathcal{X}_1$ e $X_2 \in \mathcal{X}_2$ são independentes. Nas sequências geradas pela fonte X, os símbolos do conjunto $\mathcal{X}_1$ ocorrem com probabilidade p. Qual é o valor de p que maximiza a entropia da fonte?

a) $p = \frac{1}{2}$. ☐

b) $p = \frac{N_2}{N_1+N_2}$. ☐

c) $p = \frac{N_1}{N_1+N_2}$. ■

Parte II

Problema 1

Pretende-se quantizar uma variável aleatória, de variância unitária, no intervalo $[-1, 1]$.

1. Usando a aproximação de alta resolução, qual é o menor número de bits que garante uma relação sinal-ruído de quantização $[SNR_Q = 10\log_{10}(\sigma^2/D_{mse})\,\text{dB}]$ maior do que 32dB?

2. Assuma agora que se aplica ao quantizador desenhado na alínea anterior uma variável aleatória com distribuição de Laplace, i.e., $p(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ com $\lambda > 0$. Determine o valor médio quadrático do erro de sobrecarga, assumindo que os centróides extremos são -1 e $+1$.

3. Assumindo válida a hipótese de alta resolução no intervalo $[-1, 1]$, diga para que valores de λ o erro de sobrecarga pode ser desprezado face ao erro granular.

NOTA: $\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty (x-1)^2 e^{-\lambda|x|}\,dx = \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda^2}$, $\quad \lambda > 0$; $\quad \log_{10} 3 \simeq 0.5$, $\log_{10} 2 \simeq 0.3$.

Problema 2

Considere uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade gaussiana de média zero e variância unitária aplicada na entrada de um quantizador com as células, $R_1 =]-\infty, 0[$ e $R_2 = [0, \infty[$.

1. Determine os centróides óptimos para as células R_1 e R_2.

2. Para os centróides da alínea anterior qual é o erro médio quadrático.

3. A função de distorção-ritmo para uma variável aleatória gaussiana é dada por $D(R) = \sigma^2 2^{-2R}$, para $R \geq 0$. Para um ritmo $R = 1$ e $\sigma^2 = 1$ obtém-se $D = 0.25$. Compare este valor com o obtido na alínea anterior. Comente.

NOTA: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (x-a)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{a}{2}$; $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (x-a)^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2}(1 + a^2 - 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}})$.