**Exame de 2ª Época de Percepção**
**2003 / 2004**

**1.** Considere o problema de classificação em duas classes dos padrões x1= -2.5; x2=4.5; x3=5.0 dados os conjuntos de treino:

| Classe A | Classe B |
|---|---|
| 1.6 | 4.6 |
| 2.2 | 3.3 |
| 2.3 | 5.1 |
| 2.0 | 5.3 |
| 1.8 | 3.9 |
| 1.1 | 6.2 |
| 4.3 | 6.1 |
| 6.5 | 4.9 |
| 1.7 | 5.3 |
| 0.3 | 5.2 |

**1.** Assuma que a classe A tem como distribuição $p(x\,|\,\omega_A)=\dfrac{1}{2b}e^{-\frac{x}{b}}$, em que o parâmetro $b$ é desconhecido; a classe B tem distribuição gaussiana de média desconhecida e variância unitária, $N(\mu,1)$ . Seja ainda $P(\omega_A)=0.3$ e $P(\omega_B)=0.7$ .

**(a) [2 valores]** Determine as estimativas de máxima verosimilhança para os parâmetros $b$ e $\mu$ das distribuições dos dados condicionadas às classes A e B, respectivamente.

**(b)** Seja o classificador de Bayes, com custos associados às decisões dados por: $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = 3$, $c_{21}=1$. (Se não fez a alínea anterior, considere $b$=2 e $\mu = 5$).

- **i. [2 valores]** Determine a regra de decisão de Bayes, identificando uma função discriminante para este problema.
- **ii. [1 valor]** Determine as regiões de decisão do classificador.
- **iii. [1 valor]** Classifique as amostras x1, x2, x3, de acordo com o classificador de Bayes. Indique a probabilidade de erro de classificação.

**(c) [1 valor]** Considere agora desconhecidas as distribuições das classes A e B. Classifique as amostras x1, x2, x3, de acordo com o classificador de Bayes, usando o método das janelas de Parzen. Justifique as opções tomadas.

**2. [2 valores]** Dado um conjunto de *n* observações independentes, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, com distribuição $f(x,a) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$, em que *a* é um parâmetro desconhecido, determine uma expressão para o estimador de máxima verosimilhança de *a*.

**3.** Considere o conjunto de 5 amostras representadas na tabela seguinte usando duas características, $x$ e $y$:

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 |
| 2 | 8 | 4 |
| 3 | 15 | 8 |
| 4 | 24 | 4 |
| 5 | 24 | 12 |

**(i) [3 valores]** Particione os dados em duas classes usando o algoritmo das k-médias e tomando como centroides iniciais as duas primeiras amostras. Indique os passos usados para o cálculo desta partição. Considere como medida de distância entre amostras a distância euclideana.

**(ii) [1 valor]** Compare os algoritmos de agrupamento *k-médias* e *single-link* em termos de conceito de grupo subjacente e estabilidade das soluções obtidas.

**4. [3 valores]** É conhecido que o problema do XOR pode ser resolvido através de um perceptrão com duas camadas usando o algoritmo de aprendizagem de retropropagação. Determine a topologia e os pesos desta rede.

**5.** Considere o seguinte modelo de Markov não observável:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \; \pi = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

(a) **[2 valores]** Determine a sequência de variáveis de estado mais provável para a sequência de observações *O =413* gerada de acordo com o modelo acima .

(b) **[2 valores]** Considere sequências de comprimento maior ou igual a 2. Determine a probabilidade de se observar o símbolo *o=4* em *t=2* nestas sequências. Justifique cuidadosamente a sua resposta.