1º Exame de Percepção

LEIC– 2004-2005

I. Considere o problema de classificação em duas classes, A e B, de padrões bi-dimensionais x=[x_1 x_2] ^{T}, com distribuições gaussianas bivariadas. Assuma que no vector de características x=[x_1 x_2] ^{T}, as variáveis x_1 e x_2 são independentes. Para a classe A o vector de média é $\mu=[\mu_1\ \mu_2]^T=[0\ 0]^T$ e a matriz de covariância possui como diagonal principal são $\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = 2$. Para a classe B tem-se que $\mu_1 = 4$, $\mu_2=0$ e os elementos da diagonal principal da matriz de covariância são $\sigma_1 = 2$ e $\sigma_2 = 1$. Assuma ainda que P(A)=1/3 e P(B)=2/3.

i. **(1.5 valor)** Escreva as expressões das probabilidades condicionadas a cada uma das classes para este problema, enunciando a regra de decisão de MAP.

ii. **(2 valores)** Determine a equação para a superfície de separação óptima entre as duas classes A e B (classificador de MAP).

iii. **(1.5 valor)** Classifique o padrão x=[0.5 1] ^{T} de acordo com este classificador e determine a probabilidade de erro associada.

II. **(2 valores)** A variável aleatória x obedece à distribuição de Rayleigh

$$p(x) = \frac{x}{f^2} e^{-\frac{x^2}{2f^2}}, \quad x \ge 0$$

Determine o estimador de máxima verosimilhança para *f*, dadas N observações independentes de x, (x_1 x_2 ... x_N).

III. **(2 valores)** Em muitos problemas de reconhecimento de padrões considera-se a opção entre atribuir o padrão a uma das *c* classes ou rejeitar a amostra. Se o custo de rejeição não for demasiado elevado, esta poderá ser uma opção desejável. Seja

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \quad i, j = 1, \ldots, c \\ \lambda_r & i = c+1 \\ \lambda_s & \text{caso contrario} \end{cases}$$

em que λ_r é o custo associado a escolher a classe $c+1$, de rejeição, e λ_s é o custo associado a uma decisão incorrecta. Mostre que o risco mínimo é obtido se decidir ω_i se $P(\omega_i \mid x) \ge P(\omega_j \mid x)$ para todo o *j* e se $P(\omega_i \mid x) \ge 1 - \lambda_r / \lambda_s$, rejeitando caso contrário. O que acontece se $\lambda_r = 0$? O que acontece se $\lambda_r > \lambda_s$?

IV Considere o conjunto de dados na figura 1. Os primeiros 7 pontos formam um cluster elongado enquanto os restantes 4 formam um cluster compacto. Os números ao lado das ligações entre os pontos indicam as respectivas distâncias euclideanas entre os pontos. Assuma que as distâncias que não estejam representadas na figura têm valores muito elevados.

i. **(1.5 valor)** Desenhe o dendograma produzido pelo algoritmo “single link” para estes dados. Proponha uma partição para os dados de acordo com este algoritmo.

ii. **(1.5 valor)** Repita a alínea anterior usando agora o algoritmo “complete link”.

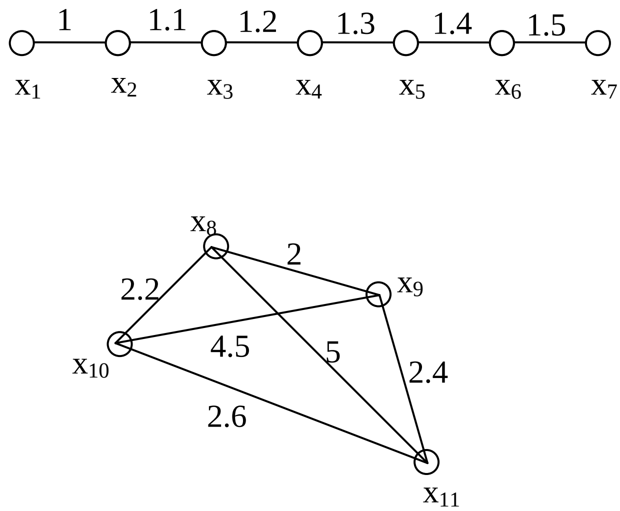

Fig 1.

V. [2.5 valores] Explique como usaria o formalismo de redes neuronais para a classificação de MAP de padrões *d*-dimensionais em *c* classes. Detalhe o tipo de redes que usaria e como procederia nas fases de aprendizagem e de classificação.

VI. Considere o modelo de Markov não observável $\lambda = (A, B, \pi)$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} .7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Seja O = (1 2 2) uma sequência de observações gerada pelo modelo. Determine

(a) [0.5 valores] $P(o_2 / q_2 = 2)$

(b) [1.5 valor] $P(q_2 = 2)$

(c) [1.5 valor] $P(O)$

(d) [2 valores] Determine a sequência de variáveis de estado mais provável para a sequência de observações, *O,* gerada de acordo com o modelo acima.