Exame de Compressão e Codificação de Dados

Secção de Telecomunicacções – DEEC, **Instituto Superior Técnico**

8 de Fevereiro de 2002

Parte I

Cotação da Parte I: resposta certa, 0.5 valores; resposta errada, -0.25 valores.
Todos os logaritmos são em base 2.

1. A entropia $H(X,Y)$ de um par de variáveis aleatórias verifica necessariamente a desigualdade

   a) $H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$, **b)** $H(X,Y) \geq H(X) + H(Y)$, **c)** nenhuma das anteriores.

2. Seja X uma variável aleatória e $Y = f(X)$ uma outra variável aleatória que é uma função determinística de X (não necessariamente bijectiva). Então

   a) $H(X) = H(Y)$, **b)** $H(X|Y) = H(Y|X)$, **c)** nenhuma das afirmações anteriores.

3. Seja X uma variável aleatória e $Y = f(X)$ uma outra variável aleatória que é uma função determinística de X (não necessariamente bijectiva). Então

   a) $I(X;Y) = H(X)$, **b)** $I(X;Y) = H(Y)$, **c)** $I(X;Y) = 0$.

4. Considere duas variáveis aleatórias X e Y que tomam valores no conjunto $\{-1, 0, 1\}$, ambas com probabilidades $\{1/3, 1/3, 1/3\}$. Considere a variável aleatória $Z = X - Y$. Então

   a) $H(Z) = \log 3$ bit/símbolo; **b)** $H(Z) = \log 5$ bit/símbolo; **c)** $H(Z) < \log 5$ bit/símbolo.

5. Considere duas variáveis aleatórias X e Y que tomam valores no conjunto $\{-1, 0, 1\}$, ambas com probabilidades $\{1/3, 1/3, 1/3\}$. Considere a variável aleatória $Z = X \times Y$. Então

   a) $H(Z) = \log 3$ bit/símbolo; **b)** $H(Z) < \log 3$ bit/símbolo; **c)** $H(Z) > \log 3$ bit/símbolo.

6. Qual dos seguintes códigos é instantâneo?

   a) $\{00, 10, 01, 11\}$; **b)** $\{0, 01, 110, 111\}$; **c)** $\{1, 11, 010, 011\}$.

7. Qual dos seguintes códigos não pode ser óptimo para nenhuma fonte?

   a) $\{00, 01, 10, 11\}$; **b)** $\{0, 10, 110, 111\}$; **c)** $\{0, 10, 1110, 1111\}$.

8. Qual dos seguintes códigos não é óptimo para uma fonte que emite símbolos do alfabeto $\{A, B, C, D, E\}$ com probabilidades $\{1/3, 1/3, 1/4, 1/24, 1/24\}$?

   a) $\{11, 10, 00, 010, 011\}$; **b)** $\{1, 00, 010, 0110, 0111\}$; **c)** $\{1, 000, 001, 010, 011\}$.

9. Uma fonte gera símbolos do alfabeto $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, com probabilidades $\{P(x_1), P(x_2), ..., P(x_n)\}$. Sejam $l^*(x_i)$ os comprimentos de cada palavra num código óptimo para esta fonte. Então

   a) $l^*(x_i) = \lceil -\log P(x_i) \rceil$, **b)** $l^*(x_i) \leq \lceil -\log P(x_i) \rceil$,

   c) nenhuma das proposições anteriores é sempre verdadeira.

10. Considere o código $\{00, 10, 11, 010, 011\}$. Para qual das fontes seguintes é este código óptimo?

    a) ambas,

    b) $\{1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5\}$,

    c) $\{1/3, 1/5, 1/5, 2/15, 2/15\}$.

11. Considere o código $\{0, 10, 01\}$. Este código

a) é instantâneo,

b) não é instantâneo mas é univocamente descodificável,

c) não é univocamente descodificável.

12. Considere uma fonte que gera símbolos do alfabeto $\{A, B\}$ com probabilidades, respectivamente, $\{3/4, 1/4\}$. Seja C_1 um código de Huffman para esta fonte, e C_2 um código de Huffman para a extensão de segunda ordem da fonte.

a) C_2 é mais eficiente do que C_1, **b)** C_1 é mais eficiente do que C_2,

c) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

13. Considere uma fonte que gera símbolos do alfabeto $\{A, B\}$ com probabilidades, respectivamente, $\{2/3, 1/3\}$. Qual dos seguintes é um código de Huffman para a extensão de segunda ordem da fonte?

a) $\{c(AA) = 00,\ c(AB) = 01,\ c(BA) = 10,\ c(BB) = 11\}$,

b) $\{c(AA) = 0,\ c(AB) = 11,\ c(BA) = 100,\ c(BB) = 101\}$,

c) $\{c(AA) = 11,\ c(AB) = 0,\ c(BA) = 100,\ c(BB) = 101\}$.

14. Considere uma fonte binária (alfabeto $\{A, B\}$), Markoviana de segunda ordem, caracterizada pelas seguintes probabilidades de transição:

$p(X_n \vert X_{n-1}, X_{n-2})$	$X_n = A$	$X_n = B$
$\{X_{n-1}, X_{n-2}\} = \{A, A\}$	1/2	1/2
$\{X_{n-1}, X_{n-2}\} = \{A, B\}$	1/4	3/4
$\{X_{n-1}, X_{n-2}\} = \{B, A\}$	3/4	1/4
$\{X_{n-1}, X_{n-2}\} = \{B, B\}$	1/2	1/2

a) A taxa de entropia condicional desta fonte é $H = 1$ bit/símbolo;

b) A taxa de entropia condicional desta fonte verifica $H < 1$ bit/símbolo;

c) A taxa de entropia condicional desta fonte verifica $H > 1$ bit/símbolo.

15. Considere uma fonte ternária (alfabeto $\{A, B, C\}$), Markoviana de primeira ordem, caracterizada pelas seguintes probabilidades de transição:

$p(X_n \vert X_{n-1})$	$X_n = A$	$X_n = B$	$X_n = C$
$X_{n-1} = A$	0	1	0
$X_{n-1} = B$	0	0	1
$X_{n-1} = C$	1	0	0

a) A taxa de entropia condicional desta fonte é igual a $\log_2 3$ bits/símbolo.

b) A taxa de entropia condicional desta fonte é igual a zero.

c) A taxa de entropia condicional desta fonte é igual à entropia da distribuição estacionária.

16. Considere uma fonte binária (alfabeto $\{A, B\}$), Markoviana de segunda ordem, caracterizada pelas seguintes probabilidades de transição:

$p(X_n \vert X_{n-1}, X_{n-2})$	$X_n = A$	$X_n = B$
$\{X_{n-1}, X_{n-2}\} = \{A, A\}$	1/2	1/2
$\{X_{n-1}, X_{n-2}\} = \{A, B\}$	1/2	1/2
$\{X_{n-1}, X_{n-2}\} = \{B, A\}$	1/2	1/2
$\{X_{n-1}, X_{n-2}\} = \{B, B\}$	1/2	1/2

a) O comprimento médio do código preditivo óptimo é menor do que o de um código de Huffman baseado na distribuição estacionária;

b) O comprimento médio do código preditivo óptimo é igual ao de um código de Huffman baseado na distribuição estacionária;

c) A taxa de entropia condicional é 2 bits símbolo.

17. Considere um quantizador vectorial Q_1, o qual é óptimo para a função densidade de probabilidade de um vector aleatório de dimensão 2, $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$, designada $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. Considere um quantizador vectorial Q_2, para o mesmo vector aleatório, constituido por dois quantizadores escalares, um para cada uma das componente do vector de entrada. Estes dois quantizadores escalares são óptimos para as função densidade de probabilidade marginais de cada uma das componentes de $\mathbf{X}$, $f_{X_1}(x)$ e $f_{X_2}(x)$.

a) O erro quadrático médio de Q_2 é sempre maior do que o de Q_1.

b) O erro quadrático médio de Q_2 é igual ao de Q_1, se X_1 e X_2 forem independentes.

c) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

18. Considere um quantizador escalar uniforme com b bits. Na aproximação de alta resolução, ao aumentar o número de bits de b para $b + 1$, a relação sinal/ruído de quantização aumenta, aproximadamente

a) 3 dB,

b) 6 dB,

c) 12 dB.

19. Considere um quantizador escalar uniforme com probabilidade de sobrecarga desprezável. Na aproximação de alta resolução, ao duplicar-se o número de células, o erro quadrático médio de quantização

a) passa para um quarto,

b) passa para metade,

c) nenhuma das afirmações anteriores.

20. Considere uma fonte X cuja função densidade de probabilidade é Gaussiana de média nula e variância σ^2, isto é, $f_X(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-x^2/(2\sigma^2)\}$. Um quantizador escalar uniforme com N células distribuidas no intervalo $[-3\sigma; 3\sigma]$

a) é óptimo para esta fonte.

b) não é óptimo para esta fonte,

c) pode ou não ser óptimo para esta fonte, dependendo de N.

Parte II

Problema 1

Uma das importantes contribuições da teoria da informação para a estatística é o *método dos tipos*. Considere uma sequência $\mathbf{x} = x(1), x(2), ..., x(n)$, de comprimento n, gerada por uma fonte cujo alfabeto é $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_N\}$. Por exemplo, $\mathbf{x} = ABAABCCABCAB$ é uma sequência de comprimento $n = 12$, gerada por uma fonte de alfabeto $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$. O *tipo* da sequência $\mathbf{x}$, designado $P_{\mathbf{x}} = [p_1, ..., p_N]$, é um vector de frequências relativas de ocorrências de cada símbolo do alfabeto na sequência. Por exemplo, para $\mathbf{x} = ABAABCCABCAB$, temos $P_{\mathbf{x}} = [5/12,\ 4/12,\ 3/12]$, correspondente a 5 A's, 4 B's e 3 C's, num total de 12. Seja $Q = [q_1, ..., q_N]$ a distribuição de probabilidade da fonte. Por exemplo, para uma fonte de alfabeto $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$, podemos ter $Q = [0.5,\ 0.3,\ 0.2]$, correspondente a $p(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ e $P(C) = 0.2$.

É possível demonstrar que a probabilidade de uma fonte cuja ditribuição de probabilidade é Q gerar uma sequência $\mathbf{x}$ é dada por

$$P(\mathbf{x}) = 2^{-n(H(P_{\mathbf{x}})+D(P_{\mathbf{x}}||Q))} \tag{1}$$

onde $H(P_{\mathbf{x}})$ é a entropia do tipo $P_{\mathbf{x}}$ e $D(P_{\mathbf{x}}||Q))$ é a divergência de Kullback-Leibler entre o tipo $P_{\mathbf{x}}$ e a distribuição de probabilidade Q, isto é,

$$D(P_{\mathbf{x}}||Q)) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log \frac{p_i}{q_i}.$$

a) Obtenha o caso particular da expressão (1) para uma fonte de símbolos equiprováveis, $Q = [1/N, ..., 1/N]$. Interprete o resultado.

b) Obtenha o caso particular da expressão (1) para $P_{\mathbf{x}} = Q$. Aplique a expressão obtida para calcular a probabilidade de uma fonte de alfabeto $\{A,\ B,\ C,\ D\}$, com distribuição de probabilidade $[1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ 1/8]$, gerar uma dada sequência de comprimento 40 com exactamente 20 A's, 10 B's, 5 C's e 5 D's.

c) Designa-se por $T_n(P_{\mathbf{x}})$ o conjunto de todas as sequências de comprimento n cujo tipo é $P_{\mathbf{x}}$. Por exemplo, para uma fonte binária de alfabeto $\{A,\ B\}$, $T_4([3/4, 1/4])$ é o conjunto de todas as sequências com 3 A's e um B, isto é, $T_4([3/4, 1/4]) = \{AAAB, AABA, ABAA, BAAA\}$. Demonstra-se que a probabilidade de $T_n(P_{\mathbf{x}})$, quando n é grande, é aproximadamente dada por

$$P(T_n(P_{\mathbf{x}})) \simeq 2^{-nD(P_{\mathbf{x}}||Q)}.$$

Com base neste resultado calcule

$$\lim_{n\to\infty} P(T_n(P_{\mathbf{x}})),$$

para os casos $P_{\mathbf{x}} = Q$ e $P_{\mathbf{x}} \neq Q$, e comente o resultado.

Problema 2

a) Considere uma fonte que gera símbolos do alfabeto $\{A, B, C, D, E, F\}$ com probabilidades respectivamente $\{1/3, 1/3, 1/4, 1/24, 1/48, 1/48\}$. Desenhe dois códigos de Huffman com palavras de comprimentos diferentes. Calcule os comprimentos médios desses códigos.

b) Considere um código de comprimento fixo para a fonte definida em **a)**. Calcule o seu comprimento médio e comente o resultado.

c) Considere uma fonte que gera símbolos do alfabeto $\{A, B, C, D, E\}$ com probabilidades respectivamente $\{1/2, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8\}$. Calcule o comprimento médio do código óptimo para esta fonte sem usar o procedimento de Huffman.