Exame de Compressão e Codificação de Dados

Secção de Telecomunicacções – DEEC, **Instituto Superior Técnico**

24 de Janeiro de 2004

Parte I

Cotação da Parte I: resposta certa, 0.5 valores; resposta errada, -0.25 valores.
Salvo explicitamente indicado, todos os logaritmos são em base 2. Todas as entropias, comprimentos médios de códigos e capacidades de canais estão expressas em bit/símbolo.

1. Considere o par de variáveis aleatórias (v.a.) X e Y, binárias (isto é, com valores em $\{0,1\}$), cuja função de probabilidade conjunta é dada por: $p(X=0,Y=0)=1/4$, $p(X=0,Y=1)=1/4$, $p(X=1,Y=0)=1/2$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   a) $H(X,Y)=2$; **b)** $H(X)=1$; **c)** $H(Y)=1$.

2. Sejam X e Y as variáveis aleatórias da pergunta anterior. Então,

   a) $H(Y|X=1)=0$; **b)** $H(Y|X)=0$; **c)** $H(X|Y)=0$.

3. Considere duas novas v.a. binárias X e Y, independentes, e de entropia unitária. Considere agora uma nova v.a. Z definida como $Z=X+Y$, que tem como possíveis valores 0, 1, e 2. Então

   a) $H(Z)=\log 3$; **b)** $H(Z)=3/2$; **c)** $H(Z)=\log(3/2)$.

4. Considere as três v.a. definidas na questão anterior (X, Y e Z) e uma nova v.a. W definida como $W=X-Y$. Assim, verifica-se que

   a) $H(Z,W)=\log 3$; **b)** $H(Z,W)=\log 4$; **c)** nenhuma das respostas anteriores.

5. Considere as v.a. X e Z definidas na pergunta anterior; então,

   a) $I(Z;X)=1/2$; **b)** $I(Z;X)=1$; **c)** $I(Z;X)=3/2$.

6. Seja X uma variável aleatória arbitrária e $Y=g(X)$ uma outra variável aleatória que é uma função determinística de X. Sendo assim, pode afirmar-se que

   a) $I(X;Y)=H(X)$, sempre;
   b) $I(X;Y)=H(Y)$, sempre;
   c) $I(X;Y)=H(Y)$, se e só se $g(\cdot)$ for uma função injectiva.

7. Uma fonte gera símbolos do alfabeto $\{A,B,C,D,E\}$, com probabilidades (0.5, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05). Qual dos seguintes dos códigos binários é óptimo para esta fonte?

   a) $\{11,01,000,001,101\}$; **b)** $\{00,01,11,100,101\}$; **c)** nenhum dos anteriores.

8. Recorde que os códigos instantâneos são univocamente descodificáveis, mas que os códigos univocamente descodificáveis não são necessariamente instantâneos. Para uma dada fonte,

   a) o melhor (no sentido do comprimento médio) código univocamente descodificável é sempre melhor do que o melhor código instantâneo;

   b) o melhor código univocamente descodificável pode, ou não, ser melhor do que o melhor código instantâneo;

   b) o melhor código univocamente descodificável não pode ser melhor do que o melhor código instantâneo.

9. Uma fonte gera símbolos do alfabeto $\{A, B, C, D\}$, com probabilidades $((1/4) + \varepsilon,\ 1/4,\ 1/4,\ (1/4) - \varepsilon)$, em que $\varepsilon \in [0, 1/4]$. Qual o menor valor de ε acima do qual um código de comprimento fixo deixa de ser óptimo para esta fonte?

   a) 1/16; **b)** 1/8; **b)** 1/5.

10. Considere uma fonte que gera símbolos do alfabeto $\{a, b, c\}$ e que tem a característica de nunca emitir dois símbolos consecutivos iguais, sendo os restantes símbolos possíveis em cada instante emitidos com equiprobabilidade. A taxa de entropia condicional desta fonte verifica:

    a) $H'(X) < 1$; **b)** $H'(X) = 1$; **c)** $H'(X) > 1$.

11. A capacidade de um canal descrito pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

    a) é maior do que 1; **b)** é igual a 1; **c)** é menor que 1.

12. A capacidade de um canal descrito pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

    a) é maior do que 1; **b)** é igual a 1; **c)** é menor que 1.

13. Sejam C_1 e C_2 as capacidades de dois canais binários simétricos com probabilidades de erro p_1 e p_2, respectivamente. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

    a) $(p_1 > p_2) \Rightarrow (C_1 < C_2)$; **b)** $(C_1 > C_2) \Rightarrow (p_1 < p_2)$; **c)** nenhuma das duas.

14. Recorde que a função de ritmo/distorção $R(D)$ expressa qual o número mínimo de bits necessário para codificar uma dada fonte com um nível de distorção D. Considerando uma fonte descrita por uma função de densidade de probabilidade gaussiana, e um critério de distorção baseado no erro quadrático médio, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

    a) $\forall_D, R(D) > 0$; **b)** $R(D)$ é ilimitada; **c)** nenhuma das anteriores.

15. Para uma fonte binária, e usando um critério de distorção baseado no distância de Hamming[1], qual das seguintes afirmações é falsa?

    a) $\exists_D, R(D) = 0$; **b)** $R(D)$ é limitada; **c)** nenhuma das anteriores.

16. A entropia diferencial de uma v.a. com função densidade de probabilidade gaussiana

    a) não depende da variância;

    b) é linearmente proporcional à variância;

    a) é necessariamente menor do que a entropia de uma variável aleatória uniformemente distribuida, com a mesma variância.

17. Considere uma v.a. X cuja função densidade de probabilidade é $f_X(x) = 2 - 2x$, para $x \in [0, 1]$, e zero fora desse intervalo. Considere um quantizador uniforme de dois bits. A entropia da saída desse quantizador, designada simplesmente H, verifica

    a) $1 < H < 2$; **b)** $H = 2$; **c)** $H = 1$.

[1] Recorde que distância de Hamming entre duas sequências de bits de igual comprimento é simplesmente o número de posições em que estas duas sequências diferem.

18. O representante óptimo para a primeira célula (a mais próxima de zero) do quantizador da pergunta anterior deve ser

a) $= 1/8$; **b)** $< 1/8$; **c)** $> 1/8$.

19. Considere um quantizador escalar uniforme de b bits. Seguindo uma aproximação de alta resolução, se se duplicar o número de bits, o erro quadrático médio

a) fica 4 vezes menor;

b) fica 12 vezes menor;

c) reduz-se de um factor que depende de b.

20. Qual a principal vantagem dos métodos de codificação de tipo Lempel-Ziv sobre a codificação aritmética?

a) Permitem obter maiores taxas de compressão;

b) não requerem uma caracterização probabilística da fonte;

c) são mais rápidos.

Parte II

Problema 1. Considere o seguinte procedimento de codificação do tipo Lempel-Ziv: cada subsequência de símbolos (1 símbolo = 8 bits) de comprimento superior ou igual a L que já tenha ocorrido anteriormente é substituida por um par de "ponteiros" com o formato (p_1, p_2), indicando que a ocorrência anterior se verificou na posição p_1, e que o comprimento dessa subsequência é p_2. O ponteiro p_1 é constituido por 24 bits, enquanto que p_2 é escrito da seguinte forma:

$$000\,\underbrace{11...1}_{a\ 1\text{'s}}\,000\,\underbrace{b_1...b_a}_{a \text{ bits}}\,000.$$

em que $a = \lceil \log_2(p_2 + 1) \rceil$ é o número de bits necessário para escrever p_2 em notação binária.

a) Determine o menor valor de L para o qual este sistema nunca produz uma sequência de bits mais longa do que a original.

b) Mostre como se pode modificar o sistema de codificação do ponteiro p_2, reduzindo o número de bits necessário mas mantendo a descodificabilidade.

c) Determine o menor valor de L para o qual o sistema encontrado na alínea b) nunca produz uma sequência de bits mais longa do que a original.

Problema 2. Considere uma fonte binária na qual, depois de ser emitido um zero, é sempre emitido um 1; depois de ser emitido um 1, a probabilidade de ser emitido um 1 ou um zero é 1/2. Com vista a conseguir-se uma melhor eficiência de codificação faz-se uma estensão de terceira ordem, isto é, agrupam-se os bits 3 a 3.

a) Sabendo-se que a distribuição estacionária desta fonte é $p_\infty(0) = 1/3$ e $p_\infty(1) = 2/3$, calcule a entropia da fonte estendida (note que a fonte estendida tem um alfabeto de $2^3 = 8$ símbolos).

b) Desenhe um código de Huffman para a fonte estendida e calcule o comprimento médio (não esquecendo de indicar as respectivas unidades).

c Desenhe o código preditivo óptimo para esta fonte, calcule o respectivo comprimento médio, compare com o resultado da alínea anterior e comente.

Problema 3. Considere o seguinte mecanismo de geração de símbolos de uma fonte composta: primeiro, lança-se uma moeda equilibrada; se o resultado for "caras" obtém-se um símbolo da fonte F_1, caso contrário obtém-se um símbolo da fonte F_2. Ambas as fontes, F_1 e F_2, geram símbolos do alfabeto $\{A, B, C, D\}$ com probabilidades respectivamente $\{1/4, 1/4, 1/4, 1/4\}$ e $\{1/2, 1/4, 1/8, 1/8\}$.

a) Calcule as probabilidades dos símbolos da fonte composta.

b) Obtenha um código óptimo para a fonte composta e calcule o seu comprimento médio.

c) Uma forma possível de codificar os símbolos desta fonte composta é a seguinte: desenham-se dois códigos óptimos, um para F_1 e outro para F_2; para codificar cada símbolo, primeiro inclui-se um bit indicando qual das fontes foi escolhida, e em seguida envia-se a respectiva palavra de código usando o código óptimo dessa fonte. Calcule o código óptimo para cada uma das fontes F_1 e F_2 e determine qual o comprimento médio alcançado por este esquema de codificação. Compare com o resultado da alínea anterior e comente.

d Repita as alíneas (a), (b) e (c) para o caso em que os alfabetos das fontes F_1 e F_2 são disjuntos: $\{A, B, C, D\}$ e $\{E, F, G, H\}$ (nota: é tudo muito mais simples).

Problema 4. Considere uma variável aleatória X sobre o intervalo $[0,\ 3]$, cuja função densidade de probabilidade é a seguinte

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in ([0,\ 1] \bigcup [2,\ 3]) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Obtenha os quantizadores óptimos (regiões e representantes) para esta fonte, com 1 e 2 bits.

b) Calcule os erros quadráticos médios dos quantizadores obtidos na alínea anterior.

C) Considere o quantizador uniforme de 1 bit para o intervalo $[0,\ 3]$ definido por $R_1 = [0,\ 3/2]$, $R_2 = [3/2,\ 3]$, $y_1 = 3/4$ e $y_2 = 9/4$. Calcule o erro quadrático médio produzido por este quantizador com a variável X na sua entrada. Compare com o resultado da alínea anterior e comente.