Exame de Compressão e Codificação de Dados

Secção de Telecomunicacções – DEEC, **Instituto Superior Técnico**

21 de Janeiro de 2003

Parte I

Cotação da Parte I: resposta certa, 0.5 valores; resposta errada, -0.25 valores.
Todos os logaritmos são em base 2 e as entropias expressas em bit/símbolo.

1. A entropia $H(X,Y)$ de um par de variáveis aleatórias verifica necessariamente a desigualdade

   a) $H(X,Y) > H(X) + H(Y)$; **b)** $H(X,Y) > 0$; **c)** $H(X,Y) \geq H(X)$.

2. Seja X uma variável aleatória que toma valores num alfabeto com 2048 símbolos; então,

   a) $H(X) = 11$; **b)** $H(X) < 11$;

   c) não há dados suficientes para escolher nenhuma das hipóteses anteriores.

3. Considere as variáveis aleatórias X e Y, não necessariamente independentes, tomando ambas valores no conjunto $\{-2,-1,0,1,2\}$, e tais que $H(X) = H(Y) = \log 5$. Então, a entropia de $Z = X + Y$, é igual a

   a) $2\log 5$; **b)** $\log 9$; **c)** Nenhum dos valores anteriores.

4. Considere duas variáveis aleatórias X e Y, com valores em $\{-1,0,1\}$, e tais que $H(X) = H(Y) = \log 3$. Então, a variável aleatória $Z = X \times (Y+1)$ verifica

   a) $H(Z) = \log 3$; **b)** $H(Z) = \log 5$; **c)** $H(Z) \simeq 1.88$.

5. Considere uma pessoa que lança uma moeda equilibrada; seja $X \in \{\text{“Cara”}, \text{“Coroa”}\}$ o resultado. Com probabilidade $1/2$, essa pessoa vira a moeda para a face oposta antes de anunciar o resultado; seja $Y \in \{\text{“Cara”}, \text{“Coroa”}\}$ este resultado anunciado. Então,

   a) $I(X;Y) = 0$; **b)** $I(X;Y) = 1$; **c)** nenhuma das respostas anteriores.

6. Considere duas variáveis aleatórias X e Y, com valores em $\{0,1\}$, e uma terceira variável $Z = X + Y$. A informação mútua $I(X;Y)$ é igual a

   a) 0; **b)** 1; **c)** $1/2$.

7. Qual dos seguintes códigos é instantâneo?

   a) $\{00, 10, 01, 11\}$; **b)** $\{0, 01, 110, 111\}$; **c)** $\{1, 11, 010, 011\}$.

8. **Anulada**.

9. O código $\{1, 101, 10, 01\}$

   a) Não é instantâneo mas é univocamente descodificável;

   b) não é univocamente descodificável; **c)** é singular.

10. Uma fonte gera símbolos do alfabeto $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_n\}$, com probabilidades $\{P(x_1), ..., P(x_n)\}$. Sejam $l^*(x_i)$ o comprimento de palavra para x_i num código óptimo. Então, para qualquer símbolo x_i,

    a) $l^*(x_i) = \lceil -\log P(x_i) \rceil$, **b)** $l^*(x_i) \leq \lceil -\log P(x_i) \rceil$,

    c) nenhuma das afirmações anteriores é sempre verdadeira.

11. Considere uma fonte que gera símbolos de um alfabeto $\{A, B, C, D\}$ com probabilidades $\{0.3, 0.3, 0.2, 0.2\}$. Quantos códigos óptimos posso desenhar para esta fonte?

   a) 24; **b)** 16; **c)** 20

12. Considere uma fonte que gera símbolos de um alfabeto $\{A, B, C\}$, com probabilidades $\{1/2, 1/4, 1/4\}$. O comprimento médio do código óptimo para a extensão de segunda ordem (pares de símbolos), medido em bits/símbolo é

   a) $3/2$; **b)** $3/4$; **c)** $\log 9$.

13. Considere uma fonte que gera símbolos do alfabeto $\{A, B\}$ com probabilidades, respectivamente, $\{2/3, 1/3\}$. Qual dos seguintes é um código de Huffman para a extensão de segunda ordem da fonte?

   a) $\{c(AA) = 11,\ c(AB) = 10,\ c(BA) = 01,\ c(BB) = 00\}$,

   b) $\{c(AA) = 0,\ c(AB) = 11,\ c(BA) = 100,\ c(BB) = 101\}$,

   c) $\{c(AA) = 00,\ c(AB) = 1,\ c(BA) = 011,\ c(BB) = 010\}$.

14. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, para uma dada fonte sem memória?

a) Um codificador aritmético atinge sempre melhor desempenho do que um de Huffman (para qualquer extensão da fonte).

b) Um codificador de Huffman (para uma extensão da fonte suficientemente alta) é sempre melhor ou igual do que um codificador aritmético.

c) Nenhuma das anteriores.

15. Considere a fonte ternária (alfabeto $\{A, B, C\}$), Markoviana de primeira ordem, caracterizada pelas seguintes probabilidades de transição:

$p(X_n \vert X_{n-1})$	$X_n = A$	$X_n = B$	$X_n = C$
$X_{n-1} = A$	0	1	0
$X_{n-1} = B$	0	2/3	1/3
$X_{n-1} = C$	1/3	1/3	1/3

Qual das seguintes sequências tem maior probabilidade de ser gerada por esta fonte?

   a) $AABACCCABCCB$; **b)** $ABCABCABCABC$; **c)** $ABBABCABCABB$.

16. Considere a fonte ternária (alfabeto $\{A, B, C\}$), Markoviana de primeira ordem, caracterizada pelas seguintes probabilidades de transição:

$p(X_n \vert X_{n-1})$	$X_n = A$	$X_n = B$	$X_n = C$
$X_{n-1} = A$	0	1	0
$X_{n-1} = B$	a	b	c
$X_{n-1} = C$	1/3	1/3	1/3

com $a + b + c = 1$. Qual dos seguintes é o menor intervalo ao qual se garante pertencer $H(X)$?

   a) $[\log 2;\ \log 3]$; **b)** $[0;\ \log 3]$; **c)** $[0;\ \log 2]$.

17. Um determinado quantizador escalar uniforme com b bits, em aproximação de alta resolução, apresenta um erro quadrático médio de distorção igual a 16. Ao passar o número de bits para $b+1$, o erro quadrático médio passa a ser

   a) 8; **b)** 6; **c)** 4.

18. Considere uma fonte X cuja função densidade de probabilidade é $f_X(x) = (1 - |x|)$, para $|x| \leq 1$, e um quantizador com apenas duas células cujo *code-book* é $\{y_1, y_2\}$. Se este quantizador é óptimo, então

   a) $|y_1| < |y_2|$; **b)** $y_1 = 1/2,\ y_2 = -1/2$; **c)** $|y_1| = |y_2| < 1/2$.

19. Qual das seguintes sequências pode corresponder à codificação Lempel-Ziv-Welch (LZW) da sequência $ABCAABABCABCA$, assumindo que o alfabeto é $\{A, B, C\}$ (admita que os índices do dicionário começam em 1)

a) $1, 2, 3, 1, 4, 4, 6, 5, ...$; **b)** $1, 2, 3, 2, 3, 4, 6, 5, ...$; **c)** $1, 2, 3, 1, 4, 3, 6, 4, ...$.

20. **Anulada**.

Parte II

Problema 1

Uma das importantes contribuições da teoria da informação para a estatística é o *método dos tipos*. Considere uma sequência $\mathbf{x} = x(1), x(2), ..., x(n)$, de comprimento n, gerada por uma fonte cujo alfabeto é $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_N\}$. Por exemplo, $\mathbf{x} = ABAABCCABCAB$ é uma sequência de comprimento $n = 12$, gerada por uma fonte de alfabeto $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$. O *tipo* da sequência $\mathbf{x}$, designado $P_{\mathbf{x}} = [p_1, ..., p_N]$, é um vector de frequências relativas de ocorrências de cada símbolo do alfabeto na sequência. Por exemplo, para $\mathbf{x} = ABAABCCABCAB$, temos $P_{\mathbf{x}} = [5/12,\ 4/12,\ 3/12]$, correspondente a 5 A's, 4 B's e 3 C's, num total de 12. Seja $Q = [q_1, ..., q_N]$ a distribuição de probabilidade da fonte. Por exemplo, para uma fonte de alfabeto $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$, podemos ter $Q = [0.5,\ 0.3,\ 0.2]$, correspondente a $p(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ e $P(C) = 0.2$.

É possível demonstrar que a probabilidade de uma fonte cuja ditribuição de probabilidade é Q gerar uma sequência $\mathbf{x}$ é dada por

$$P(\mathbf{x}) = 2^{-n(H(P_{\mathbf{x}})+D(P_{\mathbf{x}}||Q))} \qquad (1)$$

onde $H(P_{\mathbf{x}})$ é a entropia do tipo $P_{\mathbf{x}}$ e $D(P_{\mathbf{x}}||Q))$ é a divergência de Kullback-Leibler entre o tipo $P_{\mathbf{x}}$ e a distribuição de probabilidade Q, isto é,

$$D(P_{\mathbf{x}}||Q) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log \frac{p_i}{q_i}.$$

a) Mostre que a expressão (1) se pode escrever como $P(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{N} q_i^{(n\,p_i)}$ e interprete o resultado.

b) Aplique a expressão (1) para calcular a probabilidade de uma fonte de alfabeto $\{A,\ B\}$, com distribuição de probabilidade $\{1/2,\ 1/2\}$, gerar uma dada sequência de comprimento 40 com exactamente 20 A's e 20 B's.

c) Designa-se por $T_n(P_{\mathbf{x}})$ o conjunto de todas as sequências de comprimento n cujo tipo é $P_{\mathbf{x}}$. Por exemplo, para uma fonte binária de alfabeto $\{A,\ B\}$, $T_4([3/4, 1/4])$ é o conjunto de todas as sequências com 3 A's e um B, isto é, $T_4([3/4, 1/4]) = \{AAAB, AABA, ABAA, BAAA\}$. Demonstra-se que a probabilidade de $T_n(P_{\mathbf{x}})$, quando n é grande, é aproximadamente dada por

$$P(T_n(P_{\mathbf{x}})) \simeq 2^{-nD(P_{\mathbf{x}}||Q)}.$$

Com base neste resultado calcule $\lim_{n\to\infty} P(T_n(P_{\mathbf{x}}))$,, para os casos $P_{\mathbf{x}} = Q$ e $P_{\mathbf{x}} \neq Q$, e comente o resultado.

Problema 2

a) Considere um quantizador escalar uniforme com apenas 2 células iguais $R_1 = [-2,\ 0[$ e $R_2 = [0,\ 2[$. Considere que a entrada é uma variável aleatória cuja função densidade de probabilidade é

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - ||x| - 1|\,, & x \in [-2,\ 2] \\ 0, & x \notin [-2,\ 2] \end{cases}$$

Obtenha expressões exactas para os 2 elementos do "code-book" óptimo correspondente a estas células.

b) Nas condições da alínea anterior, calcule o valor exacto do erro quadrático médio de quantização.

c) Aplique um passo do algoritmo Linde-Buzo-Gray a partir do quantizador obtido na alínea (a) e comente o resultado.

d) Obtenha o quantizador óptimo para esta fonte, agora com quatro células, e calcule o seu erro quadrático médio de quantização.